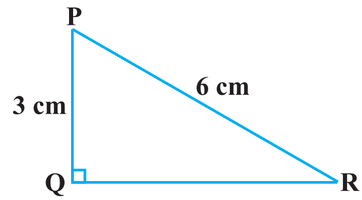
उदाहरण 7 : Δ PQR में, जिसका कोण Q समकोण है (देखिए आकृति 8.20), PQ = 3 cm और PR = 6 cm है। $\angle$ QPR और $\angle$ PRQ ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.20

हल : दिया हुआ है PQ = 3 cm और PR = 6 cm

इसलिए $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

या $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अत: $\angle PRQ = 30°$

और, इसलिए [redacted]

आप यहाँ यह देख [redacted] भुजा और कोई एक अन्य भाग (जो या [redacted] हो, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ और कोण ज्ञा[redacted]

उदाहरण 8 : यदि sin[redacted] B ≤ 90°, A > B, तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि sin (A[redacted] (1)

और, क्योंकि cos (A[redacted] (2)

(1) और (2) को हल करने पर हमें A = 45° और B = 15° प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$ (ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$ (iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5 \cos^2 60° + 4 \sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i) $\dfrac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ बराबर है:

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

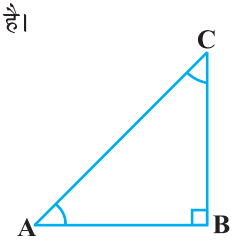
(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) θ के सभी मानों पर $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0°$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

8.4 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.21

आपको याद होगा कि दो कोणों को पूरक कोण तब कहा जाता है जबकि उनका योग 90° के बराबर होता है।

Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, क्या आपको पूरक कोणों का कोई युग्म दिखाई पड़ता है (देखिए आकृति 8.21)।

क्योंकि $\angle A + \angle C = 90°$, अत: इनसे पूरक कोणों का एक युग्म बनता है। हम जानते हैं कि

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \dfrac{BC}{AC} & \cos A = \dfrac{AB}{AC} & \tan A = \dfrac{BC}{AB} \\[2ex] \operatorname{cosec} A = \dfrac{AC}{BC} & \sec A = \dfrac{AC}{AB} & \cot A = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

आइए, अब हम $\angle C = 90° - \angle A$ के त्रिकोणमितीय अनुपात लिखें।

सुविधा के लिए हम $90° - \angle A$ के स्थान पर $90° - A$ लिखेंगे।

कोण $90° - A$ की सम्मुख भुजा और संलग्न भुजा क्या होगी?

आप देखेंगे कि AB कोण $90° - A$ की सम्मुख भुजा है और BC संलग्न भुजा है। अत:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(90° - A) = \dfrac{AB}{AC}, \quad \cos(90° - A) = \dfrac{BC}{AC}, \quad \tan(90° - A) = \dfrac{AB}{BC} \\ \text{cosec}(90° - A) = \dfrac{AC}{AB}, \quad \sec(90° - A) = \dfrac{AC}{BC}, \quad \cot(90° - A) = \dfrac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad (2)$$

अब (1) और (2) के अनुपातों की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि

$$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ और } \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A.$$

और $$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A, \quad \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \text{cosec } A, \quad \text{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

अत: **sin (90° – A) = cos A,** **cos (90° – A) = sin A.**

tan (90° – A) = cot A, **cot (90° – A) = tan A**

sec (90° – A) = cosec A, **cosec (90° – A) = sec A**

जहाँ कोण A के सभी मान 0° और 90° के बीच स्थित हैं। बताइए कि यह $A = 0°$ या $A = 90°$ पर लागू होता है या नहीं।

टिप्पणी : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \text{cosec } 90°$ और $\sec 90°$, $\text{cosec } 0°$, $\tan 90°$ और $\cot 0°$ परिभाषित नहीं है।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°}$ का मान निकालिए।

हल : जैसा कि हम जानते हैं कि $\cot A = \tan(90° - A)$.

अत: $$\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$$

अर्थात् $$\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$$

उदाहरण 10 : यदि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ हो, जहाँ, 3 A एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ यह दिया हुआ है कि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ (1)

क्योंकि $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$, इसलिए हम (1) को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$$

क्योंकि $90° - 3A$ और $A - 26°$ दोनों ही न्यून कोण है, इसलिए

$$90° - 3A = A - 26°$$

जिससे $A = 29°$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 11 : $\cot 85° + \cos 75°$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल :
$$\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$$
$$= \tan 5° + \sin 15°$$

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित का मान निकालिए:

   (i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

2. दिखाइए कि

   (i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

   (ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18°)$, जहाँ 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90°$

5. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20°)$, जहाँ 4A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

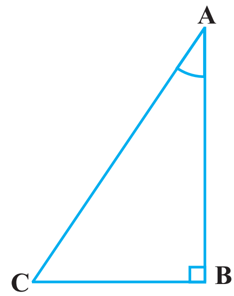
6. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतःकोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

7. $\sin 67° + \cos 75°$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

8.5 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

आपको याद होगा कि एक समीकरण को एक सर्वसमिका तब कहा जाता है जबकि यह संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो। इसी प्रकार एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को **त्रिकोणमितीय सर्वसमिका** कहा जाता है। जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।



आकृति 8.22

इस भाग में, हम एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका सिद्ध करेंगे और इसका प्रयोग अन्य उपयोगी त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में करेंगे।

Δ ABC में, जो B पर समकोण है (देखिए आकृति 8.22)

हमें यह प्राप्त है $\quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$

(1) के प्रत्येक पद को AC^2 से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

या $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

अर्थात् $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

अर्थात् $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$$

यह सभी A के लिए, जहाँ $0° \le A \le 90°$, सत्य होता है। अत: यह एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका है।

आइए, अब हम (1) को AB^2 से भाग दें। ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

या $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

अर्थात् $$\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$$

क्या यह समीकरण, $A = 0°$ के लिए सत्य है? हाँ, यह सत्य है। क्या यह $A = 90°$ के लिए भी सत्य है? $A = 90°$ के लिए $\tan A$ और $\sec A$ परिभाषित नहीं है। अतः (3), ऐसे सभी A के लिए सत्य होता है, जहाँ $0° \le A < 90°$

आइए हम यह देखें कि (1) को BC^2 से भाग देने पर हमें क्या प्राप्त होता है।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

अर्थात्
$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

अर्थात्
$$\mathbf{cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \quad (4)$$

ध्यान दीजिए कि $A = 0°$ के लिए $\text{cosec } A$ और $\cot A$ परिभाषित नहीं है। अतः ऐसे सभी A के लिए (4) सत्य होता है जहाँ $0° < A \le 90°$

इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके हम प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं अर्थात् यदि कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो हम अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए हम यह देखें कि इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके इसे हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए हमें $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ज्ञात है। तब $\cot A = \sqrt{3}$

क्योंकि $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, और $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और, क्योंकि $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. इसलिए $\text{cosec } A = 2$

उदाहरण 12 : अनुपातों $\cos A$, $\tan A$ और $\sec A$ को $\sin A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : क्योंकि $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, इसलिए

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, अर्थात् $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

इससे यह प्राप्त होता है $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (क्यों?)

अतः $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ और $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

उदाहरण 13 : सिद्ध कीजिए कि sec A (1 – sin A) (sec A + tan A) = 1

हल :

$$\text{वाम पक्ष} = \sec A\,(1-\sin A)(\sec A+\tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{दाँया पक्ष}$$

उदाहरण 14 : सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

हल : $\text{वाम पक्ष} = \dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$\frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{दाँया पक्ष}$$

उदाहरण 15 : सर्वसमिका $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

हल : क्योंकि हमें sec θ और tan θ से संबंधित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए आइए हम सबसे पहले सर्वसमिका के वाम पक्ष के अंश और हर को cos θ से भाग देकर वाम पक्ष को sec θ और tan θ के पदों में रूपांतरित करें।

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

जो सिद्ध की जाने वाली अपेक्षित सर्वसमिका का दाँया पक्ष है।

प्रश्नावली 8.4

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों sin A, sec A और tan A को cot A के पदों में व्यक्त कीजिए।

2. $\angle$A के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec A के पदों में लिखिए।

3. मान निकालिए :

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

4. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)\,(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$ बराबर है:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)\,(1 - \sin A)$ बराबर है:

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है:

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[**संकेत:** व्यंजक को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में लिखिए]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[**संकेत:** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए।]

(v) सर्वसमिका $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**संकेत :** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है,

$$\sin A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}, \cos A = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}$$

2. $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3. यदि एक न्यून कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ और $90°$ के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान।

5. $\sin A$ या $\cos A$ का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं होता, जबकि $\sec A$ या $\text{cosec } A$ का मान सदैव 1 से अधिक या 1 के बराबर होता है।

6. $\sin (90° - A) = \cos A, \cos (90° - A) = \sin A;$

   $\tan (90° - A) = \cot A, \cot (90° - A) = \tan A;$

   $\sec (90° - A) = \text{cosec } A, \text{cosec } (90° - A) = \sec A.$

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ जहाँ $0° \le A < 90°$

   $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ जहाँ $0° < A \le 90°$