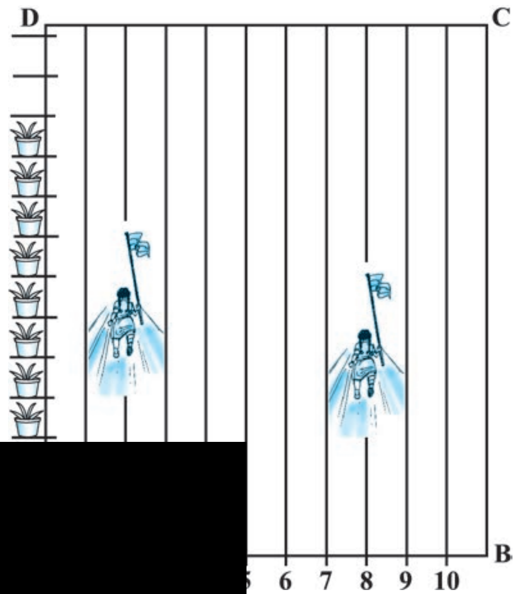
3. आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चूने से परस्पर 1m की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1m की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्री[redacted] के $\frac{1}{5}$ भाग के [redacted] है और वहाँ एक [redacted] दोनों झंडों के [redacted] क्या है? यदि र[redacted]ी रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) [redacted]हिए?



[redacted]ति 7.12

4. बिंदुओं (– 3, 10) [redacted] किस अनुपात में विभाजित करता है।

5. वह अनुपात ज्ञा[redacted]ो मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभा[redacted]ात कीजिए।

6. यदि बिंदु (1, 2), [redacted]मांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात [redacted]

7. बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र (2, – 3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

8. यदि A और B क्रमश: (– 2, – 2) और (2, – 4) हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

9. बिंदुओं A(– 2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

10. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) और (– 2, – 1) हैं। [**संकेत :** समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)]

7.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

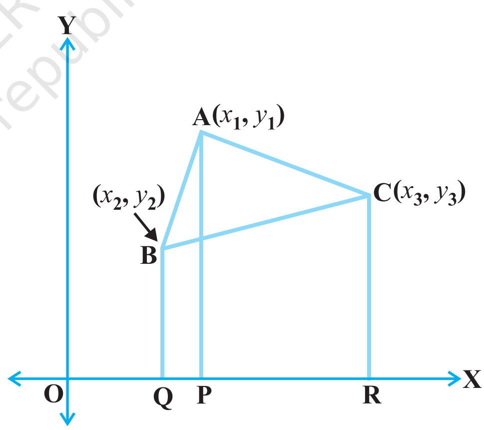
अपनी पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि एक त्रिभुज का आधार और उसका संगत शीर्षलंब (ऊँचाई) दिए रहने पर, त्रिभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार परिकलित किया जाता है। आपने निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया था:

$$\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{शीर्षलंब}$$

कक्षा IX में, आपने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हीरोन के सूत्र का भी अध्ययन किया था। अब यदि किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों के निर्देशांक दिए हों, तो क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

एक विधि यह हो सकती है कि आप दूरी सूत्र का प्रयोग करके त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात करें और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर लें। परंतु यह विधि जटिल हो सकती है, विशेष रूप से तब जब भुजाएँ अपरिमेय संख्याओं के रूप में प्राप्त हो जाएँ। आइए देखें कि क्या इसकी कोई अन्य सरल विधि है।

मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। क्रमशः बिंदुओं A, B और C से x-अक्ष पर लंब AP, BQ और CR खींचिए। स्पष्टतः चतुर्भुज ABQP, APRC और BQRC समलंब हैं (देखिए आकृति 7.13)।



आकृति 7.13

अब, आकृति 7.13 से, यह स्पष्ट है कि

ΔABC का क्षेत्रफल = समलंब ABQP का क्षेत्रफल + समलंब APRC का क्षेत्रफल – समलंब BQRC का क्षेत्रफल

आप यह भी जानते हैं कि

$$\text{एक समलंब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\,(\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times (\text{उनके बीच की दूरी})$$

अतः

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}\,(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right]$$

अत:, Δ ABC का क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$

का संख्यात्मक मान है

आइए इस सूत्र का उपयोग दर्शाने के लिए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 : उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, –1), (– 4, 6) और (–3, –5) है।

हल : शीर्षों A(1, –1), B(– 4, 6) और C (–3, –5) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल, उपरोक्त सूत्र द्वारा निम्नलिखित है:

$$\frac{1}{2}\left[1\,(6 + 5) + (-4)\,(-5 + 1) + (-3)\,(-1 - 6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग मात्रक है।

उदाहरण 12 : बिंदुओं A(5, 2), B(4, 7) और C (7, – 4) से बनने वाले ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : शीर्षों A(5, 2), B(4, 7) और C (7, – 4) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है:

$$\frac{1}{2}\left[5\,(7 + 4) + 4\,(-4 - 2) + 7\,(2 - 7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) = \frac{-4}{2} = -2$$

चूँकि क्षेत्रफल एक माप है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकता है। अत:, हम क्षेत्रफल के रूप – 2 का संख्यात्मक मान 2 लेंगे। इसलिए त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 वर्ग मात्रक है।

उदाहरण 13 : बिंदुओं P(–1.5, 3), Q(6, –2) और R(–3, 4) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है:

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3+2)]$$

$$=\frac{1}{2}(9+6-15)=0$$

क्या हम 0 वर्ग मात्रक क्षेत्रफल वाला कोई त्रिभुज प्राप्त कर सकते हैं? इसका अर्थ क्या है? इसका अर्थ है कि यदि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 मात्रक हो, तो उसके शीर्ष संरेखी होंगे।

उदाहरण 14 : k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A(2, 3), B(4, k) और C(6, –3) संरेखी हैं।

हल : चूँकि तीनों बिंदु संरेखी हैं, इसलिए इनसे बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा। अर्थात्

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

अर्थात् $\frac{1}{2}(-4k)=0$

या $k=0$

अतः, k का वांछित मान 0 है।

आइए अपने उत्तर की जाँच करें।

$$\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)]=0$$

उदाहरण 15 : यदि A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) और D(4, 5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : B को D से मिलाने पर, आपको दो त्रिभुज ABD और BCD प्राप्त होते हैं।

अब $\Delta\, ABD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$

$$=\frac{1}{2}(50+8+48)=\frac{106}{2}=53 \text{ वर्ग मात्रक}$$

साथ ही, Δ BCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$

$$= \frac{1}{2}(44-10+4) = 19 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अत:, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = 53 + 19 = 72 वर्ग मात्रक

टिप्पणी : किसी बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम उसे ऐसे त्रिभुजों में बाँटते हैं, जिनमें कोई क्षेत्र सार्वनिष्ठ न हो और फिर इन सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को जोड़ लेते हैं।

प्रश्नावली 7.3

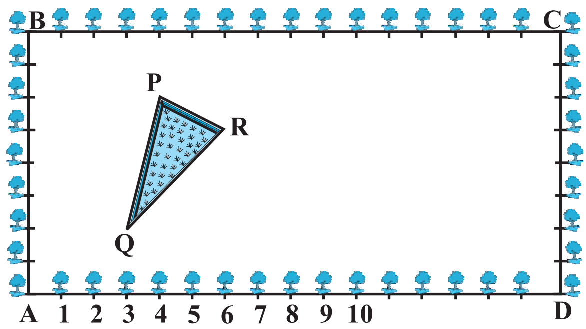
1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं :
   (i) $(2, 3), (-1, 0), (2, -4)$ (ii) $(-5, -1), (3, -5), (5, 2)$
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'k' का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों बिंदु संरेखी हों :
   (i) $(7, -2), (5, 1), (3, k)$ (ii) $(8, 1), (k, -4), (2, -5)$
3. शीर्षों $(0, -1), (2, 1)$ और $(0, 3)$ वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का दिए हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, $(-4, -2), (-3, -5), (3, -2)$ और $(2, 3)$ हैं।
5. कक्षा IX में आपने पढ़ा है (अध्याय 9, उदाहरण 3) कि किसी त्रिभुज की एक माध्यिका उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। उस त्रिभुज ABC के लिए इस परिणाम का सत्यापन कीजिए जिसके शीर्ष $A(4, -6), B(3, -2)$ और $C(5, 2)$ हैं।

प्रश्नावली 7.4 (ऐच्छिक)*

1. बिंदुओं $A(2, -2)$ और $B(3, 7)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ जिस अनुपात में विभाजित करती है उसे ज्ञात कीजिए।
2. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु $(x, y), (1, 2)$ और $(7, 0)$ संरेखी हैं।
3. बिंदुओं $(6, -6), (3, -7)$ और $(3, 3)$ से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र ज्ञात कीजिए।
4. किसी वर्ग के दो सम्मुख शीर्ष $(-1, 2)$ और $(3, 2)$ हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

5. कृष्णानगर के एक सेकेंडरी स्कूल के कक्षा X के विद्यार्थियों को उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए, एक आयताकार भूखंड दिया गया है। गुलमोहर की पौध (sapling) को परस्पर 1m की दूरी पर इस भूखंड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखंड के अंदर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, जैसाकि आकृति 7.14 में दर्शाया गया है। विद्यार्थियों को भूखंड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।



आकृति 7.14

(i) A को मूलबिंदु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि मूलबिंदु C हो, तो Δ PQR के शीर्षों के निर्देशांक क्या होंगे?

साथ ही, उपरोक्त दोनों स्थितियों में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

6. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A(4, 6), B(1, 5) और C(7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है। Δ ADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना Δ ABC के क्षेत्रफल से कीजिए। (प्रमेय 6.2 और प्रमेय 6.6 का स्मरण कीजिए।)

7. मान लीजिए A (4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि AP : PD = 2 : 1 हो।

(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ : QE = 2 : 1 हो और CR : RF = 2 : 1 हो।

(iv) आप क्या देखते हैं?

[**नोट :** वह बिंदु जो तीनों माध्यिकाओं में सार्वनिष्ठ हो, उस त्रिभुज का केंद्रक *(centroid)* कहलाता है और यह प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।]

(v) यदि $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. बिंदुओं A(–1, –1), B(–1, 4), C(5, 4) और D(5, –1) से एक आयत ABCD बनता है। P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हैं। क्या चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

7.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

2. बिंदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ होती है।

3. उस बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक जो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, निम्नलिखित होते हैं:

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

4. बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ के मध्यबिंदु के निर्देशांक

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होते हैं।

5. बिंदुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

व्यंजक $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

का संख्यात्मक मान होता है।

पाठकों के लिए विशेष

अनुभाग 7.3 में किसी बिंदु P के लिए जिसके निर्देशांक (x, y) हैं तथा यदि यह बिंदु किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप में $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है तो

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

ध्यान दीजिए कि $PA : PB = m_1 : m_2$

तथापि यदि बिंदु P बिंदुओं A और B के बीच स्थित नहीं है, परंतु यह रेखाखंड के वाह्य में स्थित है जहाँ $PA : PB = m_1 : m_2$ है तब हम कहते हैं कि P बिंदुओं A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को वाह्यत: विभाजित करता है। ऐसी स्थितियों से संबंधित विभाजन सूत्र का अध्ययन आप उच्चतर कक्षाओं में करेंगे।