आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 : A.P. : 8, 3, –2, . . . के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 8,\ d = 3 - 8 = -5$ और $n = 22$ है।

हम जानते हैं कि

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\, d]$$

अतः $$S = \frac{22}{2}[16 + 21\,(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

इसलिए दी हुई A.P. [redacted]

उदाहरण 12 : यदि [redacted] तथा इसका प्रथम पद 10 है तो 20वाँ पद [redacted]

हल : यहाँ $S_{14} = 105$[redacted]

चूँकि [redacted]

इसलिए [redacted]

अर्थात् [redacted]

या [redacted]

अतः $$a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$$

अर्थात् 20वाँ पद 200 है।

उदाहरण 13 : A.P. : 24, 21, 18, . . . के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो?

हल : यहाँ $a = 24,\ d = 21 - 24 = -3$ और $S_n = 78$ है। हमें n ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

अतः $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

या $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

या $$n^2 - 17n + 52 = 0$$

या $$(n-4)(n-13) = 0$$

अत: $$n = 4 \text{ या } 13$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं। अत:, पदों की वांछित संख्या या तो 4 है या 13 है।

टिप्पणी :

1. इस स्थिति में, प्रथम 4 पदों का योग = प्रथम 13 पदों का योग = 78 है।
2. ये दोनों उत्तर संभव हैं, क्योंकि 5वें से 13वें पदों तक का योग शून्य हो जाएगा। यह इसलिए है कि यहाँ a धनात्मक है और d ऋणात्मक है, जिससे कुछ पद धनात्मक और कुछ पद ऋणात्मक हो जाते हैं तथा परस्पर कट जाते हैं।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(i) प्रथम 1000 धन पूर्णांक (ii) प्रथम n धन पूर्णांक

हल :

(i) मान लीजिए $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ है।

A.P. के प्रथम n पदों के योग के सूत्र $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

अत:, प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग 500500 है।

(ii) मान लीजिए $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ है।

यहाँ $a = 1$ और अंतिम पद $l = n$ है।

अत: $$S_n = \frac{n(1+n)}{2} \quad \text{या} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

इस प्रकार, **प्रथम n धन पूर्णांकों का योग सूत्र**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 15 : संख्याओं की उस सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

हल :

चूँकि $\qquad a_n = 3 + 2n$ है

इसलिए $\qquad a_1 = 3 + 2 = 5$

$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$

$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$

$$\vdots$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूची 5, 7, 9, 11, . . . है।

यहाँ $\qquad 7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ इत्यादि हैं।

अत: इनसे एक A.P. बनती है, जिसका सार्व अंतर 2 है।

S_{24} ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है: $n = 24, \quad a = 5, \quad d = 2$

अत: $\qquad S_{24} = \frac{24}{2}\left[2\times5+(24-1)\times2\right] = 12\left[10+46\right] = 672$

इसलिए संख्याओं की दी हुई सूची के प्रथम 24 पदों का योग 672 है।

उदाहरण 16 : टी.वी. सेटों का निर्माता तीसरे वर्ष में 600 टी.वी. तथा 7वें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए:

(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन $\qquad$ (ii) 10वें वर्ष में उत्पादन

(iii) प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादन

हल : (i) चूँकि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, इसलिए पहले, दूसरे, तीसरे, ... वर्षों में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्याएँ एक AP में होंगी। आइए nवें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या को a_n से व्यक्त करें।

अत: $\qquad a_3 = 600$ और $a_7 = 700$

या $\qquad a + 2d = 600$

और $\qquad a + 6d = 700$

इन्हें हल करने पर, हमें $d = 25$ और $a = 550$ प्राप्त होता है।

अत: प्रथम वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 550 है।

(ii) अब $$a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$$

अत: 10वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 775 है।

(iii) साथ ही
$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$
$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

अत: प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादित हुए सभी टी.वी. सेटों की संख्या 4375 है।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 पदों तक (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 पदों तक

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 पदों तक (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, 11 पदों तक

2. नीचे दिए हुए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. एक A.P. में,

(i) $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।

(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।

(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।

(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।

(vi) $a = 2, d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।

(vii) $a = 8, a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

(viii) $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।

(ix) $a = 3, n = 8$ और $S = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।

(x) $l = 28, S = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

4. 636 योग प्राप्त करने के लिए, A.P. : 9, 17, 25, . . . के कितने पद लेने चाहिए?

5. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

6. किसी A.P. के प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है?

7. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।

8. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

9. यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

10. दर्शाइए कि $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

11. यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और nवें पद ज्ञात कीजिए।

12. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

13. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

14. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

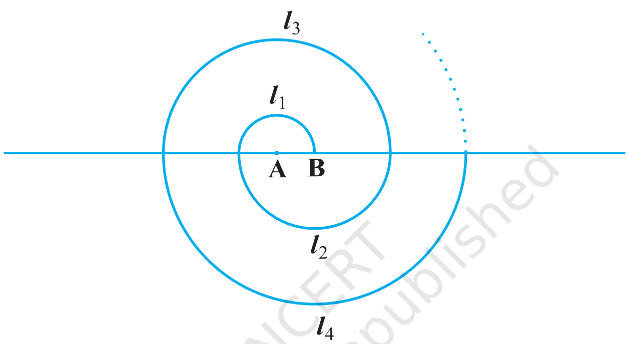
15. निर्माण कार्य से संबंधित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलंब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधान इस प्रकार है : पहले दिन के लिए ₹ 200, दूसरे दिन के लिए ₹ 250, तीसरे दिन के लिए ₹ 300 इत्यादि, अर्थात् प्रत्येक उतरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से ₹ 50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलंब कर देता है?

16. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹ 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए स्कूल के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा

II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

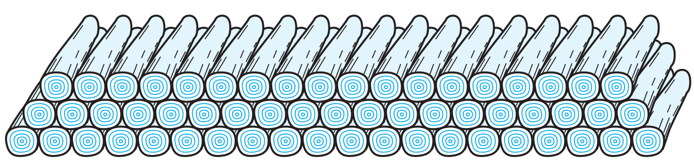
18. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... वाले उतरोत्तर अर्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (spiral) बनाया गया है, जैसाकि आकृति 5.4 में दर्शाया गया है। तेरह क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई क्या है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 5.4

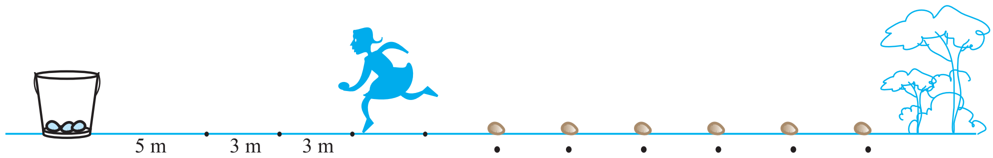
[**संकेत :** क्रमशः केंद्रों A, B, A, B, . . . वाले अर्धवृत्तों की लंबाइयाँ l_1, l_2, l_3, l_4 हैं।]

19. 200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है : सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति 5.5)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



आकृति 5.5

20. एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5m की दूरी पर है, तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3m की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति 5.6)।



आकृति 5.6

प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

[**संकेत :** पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ है।]

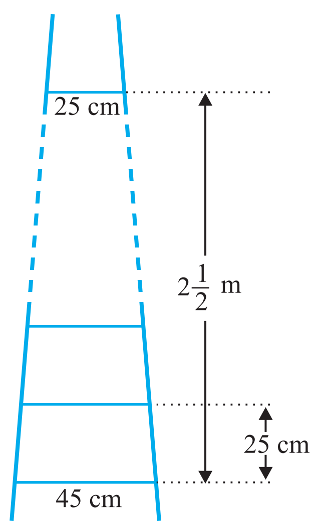
प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

1. A.P. : 121, 117, 113, . . ., का कौन-सा पद सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा?
[**संकेत :** $a_n < 0$ के लिए n ज्ञात कीजिए।]

2. किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

3. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 cm की दूरी पर हैं (देखिए आकृति 5.7)। डंडों की लंबाई एक समान रूप से घटती जाती हैं तथा सबसे निचले डंडे की लंबाई 45 cm है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लंबाई 25 cm है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी $2\frac{1}{2}$ m है, तो डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की कितनी लंबाई की आवश्यकता होगी?

[**संकेत :** डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1$ है।]



आकृति 5.7

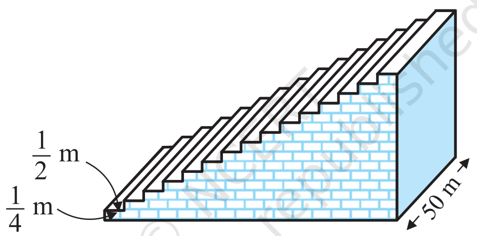
* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

4. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइए कि x का एक ऐसा मान है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ है।]

5. एक फुटबाल के मैदान में एक छोटा चबूतरा है जिसमें 15 सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। इन सीढ़ियों में से प्रत्येक की लंबाई 50 m है और वह ठोस कंक्रीट (concrete) की बनी है। प्रत्येक सीढ़ी में $\frac{1}{4}$ m की चढ़ाई है और $\frac{1}{2}$ m का फैलाव (चौड़ाई) है। (देखिए आकृति 5.8)। इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन परिकलित कीजिए।

[**संकेत :** पहली सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 \text{ m}^3$ है।]



आकृति 5.8

5.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. एक समांतर श्रेढ़ी संख्याओं की ऐसी सूची होती है, जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद के अतिरिक्त) अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या d इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहलाती है।

एक A.P. का व्यापक रूप $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$ है।

2. संख्याओं की एक दी हुई सूची A.P. होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ से एक ही (समान) मान प्राप्त हो, अर्थात् k के विभिन्न मानों के लिए $a_{k+1} - a_k$ एक ही हो।

3. प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली A.P. का nवाँ पद (या व्यापक पद) a_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है:

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

4. किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ से प्राप्त होता है।

5. यदि एक परिमित A.P. का अंतिम पद (मान लीजिए n वाँ पद) l है, तो इस A.P. के सभी पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$ से प्राप्त होता है।

पाठकों के लिए विशेष

यदि a, b, c, A.P. में हैं तब $b = \frac{a+c}{2}$ और b, a तथा c का समांतर माध्य कहलाता है।