

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

हल : यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$ है।

रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ होना चाहिए।

इसलिए हमें चाहिए
$$\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$$

या

जिससे $k^2 = 36$ प्राप्त

साथ ही

जिससे $3k = k^2 - 3k$

जिसका अर्थ $k = 0$ या

इसलिए, k का मान, 6 है। इस मान के लिए समीकरणों के युग्म

1. निम्न रैखिक समीकरण युग्म $k=6$ है, किसका कोई हल नहीं है या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे वज्र-गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x - 3y - 3 = 0$

$3x - 9y - 2 = 0$

(iii) $3x - 5y = 20$

$6x - 10y = 40$

(ii) $2x + y = 5$

$3x + 2y = 8$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$

$3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) a और b के किन मानों के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$2x + 3y = 7$$

$$(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$$

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?

$$3x + y = 1$$

$$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एवं वज्र-गुणन विधियों से हल कीजिए। किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं?

$$8x + 5y = 9$$

$$3x + 2y = 4$$

4. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए:

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। जब एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, ₹ 1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं, जबकि एक विद्यार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है छात्रावास के व्यय के लिए ₹ 1180 अदा करने पड़ते हैं। नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते, तो यश 50 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने प्रश्न थे?

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B, 100 km की दूरी पर हैं। एक कार A से तथा दूसरी कार B से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती है। यदि ये कारें भिन्न-भिन्न चालों से एक ही दिशा में चलती हैं, तो वे 5 घंटे पश्चात् मिलती हैं, यदि वे विपरीत दिशा में चलती हैं, तो एक घंटे के पश्चात् मिलती हैं। दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

(v) एक आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

3.5 दो चरों के रैखिक समीकरणों के युग्म में बदले जा सकने वाले समीकरण

इस अनुच्छेद में, हम ऐसे समीकरणों के युग्मों के बारे में चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं हैं, परंतु कुछ उपयुक्त प्रतिस्थापनों द्वारा इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदला जा सकता है। हम इस प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों द्वारा समझाएँगे।

उदाहरण 17 : समीकरणों के निम्न युग्म को हल कीजिए :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

हल : आइए दिए गए समीकरणों के युग्म को

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

के रूप में लिखें।

ये समीकरण $ax + by + c = 0$ के रूप में नहीं हैं। परंतु, यदि हम समीकरण (1) और (2) में, $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$ प्रतिस्थापित करें, तो हम पाते हैं:

$$2p + 3q = 13 \quad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \quad (4)$$

अतः, हमने समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त कर दिया है। अब आप इन्हें किसी भी विधि से हल करके $p = 2, q = 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

आप जानते हैं कि $p = \frac{1}{x}$ और $q = \frac{1}{y}$ है।

p और q के मानों को प्रतिस्थापित कर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{x} = 2, \text{ अर्थात् } x = \frac{1}{2} \text{ और } \frac{1}{y} = 3, \text{ अर्थात् } y = \frac{1}{3}$$

सत्यापन : दोनों समीकरणों में $x = \frac{1}{2}$ और $y = \frac{1}{3}$ रखने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

उदाहरण 18 : निम्न समीकरण युग्म को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल कर हल कीजिए:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

हल : आइए $\frac{1}{x-1} = p$ और $\frac{1}{y-2} = q$ रखें। तब, दी गई समीकरण

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \quad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \quad (2)$$

$$5p + q = 2 \quad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \quad (4)$$

के रूप में लिखी जा सकती हैं:

समीकरण (3) और (4) व्यापक रूप में एक रैखिक समीकरण युग्म बनाती हैं। अब आप इन समीकरणों को हल करने के लिए, किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। हम पाते

$$\text{हैं, } p = \frac{1}{3} \text{ और } q = \frac{1}{3}$$

अब p के लिए, $\frac{1}{x-1}$ प्रतिस्थापित कर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

अर्थात्

$$x - 1 = 3, \text{ अर्थात् } x = 4 \text{ है।}$$

इसी प्रकार q के लिए $\frac{1}{y-2}$, रखने पर हम पाते हैं:

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

अर्थात्

$$3 = y - 2, \text{ अर्थात् } y = 5 \text{ है।}$$

अतः, दिए गए समीकरण युग्म का अभीष्ट हल $x = 4, y = 5$ है।

सत्यापन : (1) और (2) में $x = 4$ और $y = 5$ प्रतिस्थापित करने पर जाँच कीजिए कि क्या वे इन्हें संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 19 : एक नाव 10 घंटे में धारा के प्रतिकूल 30 km तथा धारा के अनुकूल 44 km जाती है। 13 घंटे में वह 40 km धारा के प्रतिकूल एवं 55 km धारा के अनुकूल जाती है। धारा की चाल तथा नाव की स्थिर पानी में चाल ज्ञात कीजिए।



हल : माना नाव की स्थिर जल में चाल x km/h है तथा धारा की चाल y km/h है। साथ ही, नाव की धारा के अनुकूल चाल $= (x + y)$ km/h तथा नाव की धारा के प्रतिकूल चाल $= (x - y)$ km/h होगी।

साथ ही,
$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 km धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय t_1 है। तब

$$t_1 = \frac{30}{(x - y)}$$

माना t_2 घंटों में वह समय है जिसमें नाव 44 km धारा के अनुकूल चलती है। तब,

$t_2 = \frac{44}{x + y}$ है। कुल लगा समय $t_1 + t_2$, 10 घंटा है। अतः, हमें समीकरण मिलता है:

$$\frac{30}{x - y} + \frac{44}{x + y} = 10 \quad (1)$$

दूसरी स्थिति में, 13 घंटों में वह 40 km धारा के प्रतिकूल और 55 km धारा के अनुकूल चलती है। हम इससे समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$\frac{40}{x - y} + \frac{55}{x + y} = 13 \quad (2)$$

$$\frac{1}{x - y} = u \text{ और } \frac{1}{x + y} = v \text{ रखिए।} \quad (3)$$

इन मानों को समीकरण (1) और (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम रैखिक समीकरणों का निम्न युग्म प्राप्त करते हैं :

$$30u + 44v = 10 \quad \text{या} \quad 30u + 44v - 10 = 0 \quad (4)$$

$$40u + 55v = 13 \quad \text{या} \quad 40u + 55v - 13 = 0 \quad (5)$$

वज्र-गुणन विधि प्रयोग करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

अर्थात्
$$\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

अर्थात्
$$u = \frac{1}{5}, v = \frac{1}{11}$$

अब u, v के इन मानों को समीकरणों (3) में रखने पर, हम पाते हैं :

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ और } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

अर्थात्
$$x-y = 5 \text{ और } x+y = 11 \quad (6)$$

इन समीकरणों को जोड़ने पर, हम पाते हैं:

$$2x = 16$$

अर्थात्
$$x = 8$$

(6) में दी हुई समीकरणों को घटाने पर, हम पाते हैं :

$$2y = 6$$

अर्थात्
$$y = 3$$

अतः, नाव की स्थिर जल में चाल 8 km/h तथा धारा की चाल 3 km/h है।

सत्यापन : जाँच कीजिए कि ये प्रारंभिक समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्न समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल करके हल कीजिए:

(i)
$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$$

(ii)
$$\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

(iii)
$$\frac{4}{x} + 3y = 14$$

(iv)
$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$

(vi) $6x+3y=6xy$

$\frac{8x+7y}{xy} = 15$

$2x+4y=5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. निम्न समस्याओं को रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए:

- (i) रितु धारा के अनुकूल 2 घंटे में 20 km तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घंटे में 4 km तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।
- (ii) 2 महिलाएँ एवं 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते हैं, जबकि 3 महिलाएँ एवं 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक अकेली महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा।
- (iii) रूही 300 km दूरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एवं बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 3.7 (ऐच्छिक)*

- दो मित्रों अनी और बीजू की आयु में 3 वर्ष का अंतर है। अनी के पिता धरम की आयु अनी की आयु की दुगुनी और बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। कैथी और धरम की आयु का अंतर 30 वर्ष है। अनी और बीजू की आयु ज्ञात कीजिए।
- एक मित्र दूसरे से कहता है कि 'यदि मुझे एक सौ दे दो, तो मैं आपसे दो गुना धनी बन जाऊँगा।' दूसरा उत्तर देता है 'यदि आप मुझे दस दे दें, तो मैं आपसे छः गुना धनी बन जाऊँगा।' बताइए कि उनकी क्रमशः क्या संपत्तियाँ हैं? [भास्कर II की बीजगणित से]
[संकेत: $x+100=2(y-100)$, $y+10=6(x-10)$]
- एक रेलगाड़ी कुछ दूरी समान चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी 10 km/h अधिक तेज

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते और यदि रेलगाड़ी 10 km/h धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4. एक कक्षा के विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. एक ΔABC में, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
6. समीकरणों $5x - y = 5$ और $3x - y = 3$ के ग्राफ खींचिए। इन रेखाओं और y -अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए।
7. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों को हल कीजिए:

$$(i) \quad px + qy = p - q$$

$$(ii) \quad ax + by = c$$

$$qx - py = p + q$$

$$bx + ay = 1 + c$$

$$(iii) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$(iv) \quad (a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$$

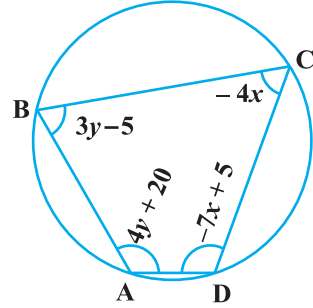
$$ax + by = a^2 + b^2$$

$$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$$

$$(v) \quad 152x - 378y = -74$$

$$-378x + 152y = -604$$

8. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है (देखिए आकृति 3.7)। इस चक्रीय चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 3.7

3.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. दो चरों में दो रैखिक समीकरण एक रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है। रैखिक समीकरण युग्म का सबसे व्यापक रूप है:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ है।

2. एक रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है और हल किया जा सकता है

- (i) ग्राफीय विधि द्वारा
- (ii) बीजगणितीय विधि द्वारा

3. ग्राफीय विधि:

दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफ दो रेखाएँ निरूपित करता है।

- (i) यदि रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो, वह बिंदु दोनों समीकरण का अद्वितीय हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म संगत होता है।
- (ii) यदि रेखाएँ संपाती हैं, तो उसके अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं—रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।
- (iii) यदि रेखाएँ समांतर हैं, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म असंगत होता है।

4. बीजगणितीय विधि : हमने एक रैखिक समीकरण युग्म के हल ज्ञात करने के लिए निम्न विधियों की चर्चा की है:

- (i) प्रतिस्थापन विधि
- (ii) विलोपन विधि
- (iii) वज्र-गुणन विधि

5. यदि दिए गए रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एक रैखिक समीकरण युग्म को प्रदर्शित करते हैं, तो निम्न स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं:

- (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म संगत होता है।
- (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म असंगत होता है।
- (iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।

6. अनेक स्थितियाँ हैं जिन्हें गणितीय रूप में ऐसी दो समीकरणों से प्रदर्शित किया जा सकता है, जो प्रारंभ में रैखिक नहीं हों। परंतु हम उन्हें परिवर्तित कर एक रैखिक समीकरण युग्म में बदल सकते हैं।