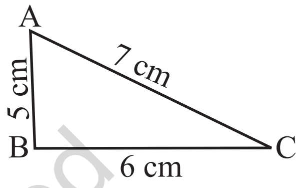
10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ दी हों (SSS कसौटी)

इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुजों की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। पहले हम इसकी एक रफ़ (rough) आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं का कुछ अनुमान लग जाए और फिर तीनों भुजाओं में से एक भुजा लेकर रचना प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए :

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि AB = 5 cm, BC = 6 cm और AC = 7 cm दिया है।

हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों की एक रफ आकृति खींचते हैं (इससे हमें आगे बढ़ने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.3(i)]।

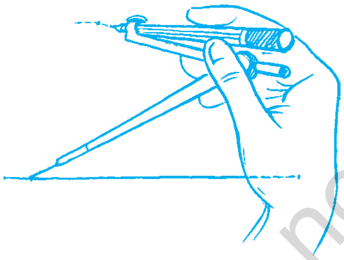


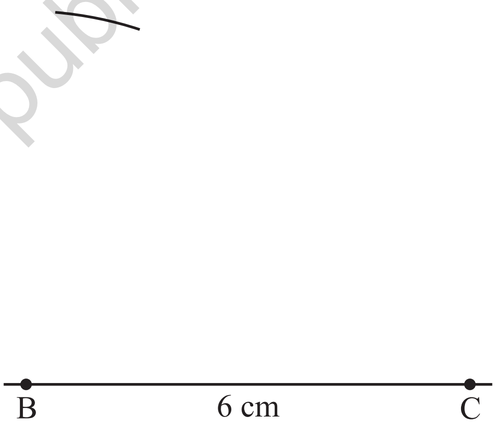
(i)

चरण 2 6 cm लंबाई का रेखा खंड BC खींचिए [आकृति 10.3(ii)]।

(ii)

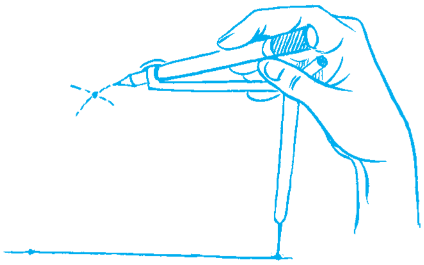
चरण 3 बिंदु B से, बिंदु A, 5 cm की दूरी पर है। अतः, B को केंद्र मान कर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (अब A इस चाप पर कहीं स्थित एक बिंदु है। यह ज्ञात करना हमारा काम है कि A बिल्कुल ठीक इस चाप पर कहाँ है) [आकृति 10.3(iii)]।

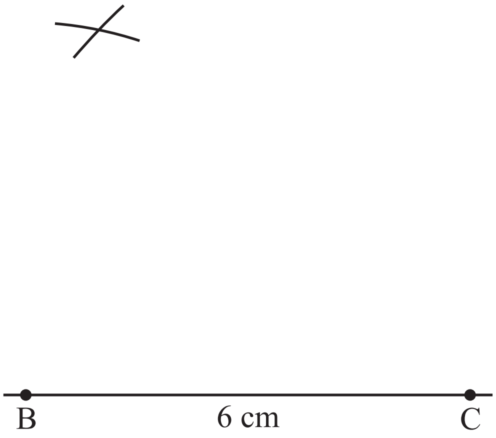




(iii)

चरण 4 C से, बिंदु A, 7 cm की दूरी पर है। अतः, C को केंद्र मान कर और 7 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (A इस चाप पर कहीं स्थित होगा। हमें इसका पता लगाना है) [आकृति 10.3(iv)]।

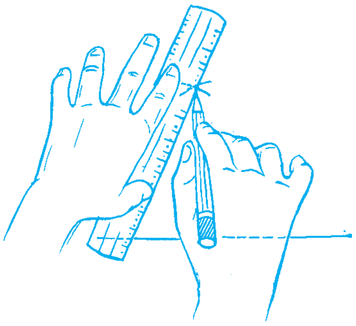


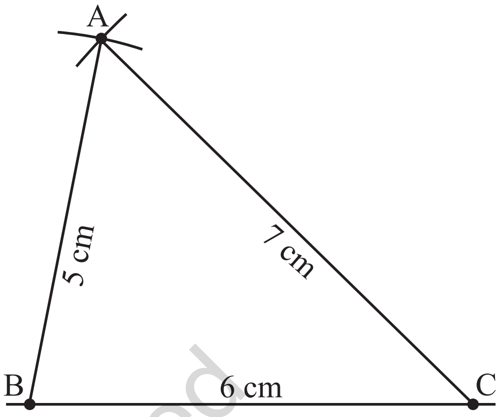


(iv)

© NCERT not to be republished

चरण 5 A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अत:, यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को जोड़िए। अब ΔABC तैयार है [आकृति 10.3(v)]।

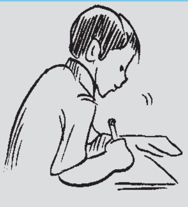




(v)

आकृति 10.3 (i) - (v)

इन्हें कीजिए

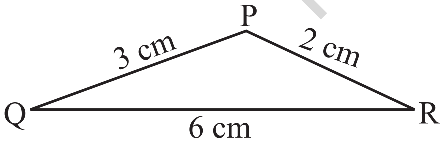


आइए अब एक अन्य त्रिभुज DEF की रचना करें, जिसमें DE = 5 cm, EF = 6 cm और DF = 7 cm है। ΔDEF को काट कर उसे ΔABC पर रखिए।

हम देखते हैं कि ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् उसके साथ संपाती हो जाता है। (ध्यान दीजिए कि इन दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई तीन भुजाओं से की गई है।) इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीन भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SSS सर्वांगसमता नियम (या कसौटी) कहलाता है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं।

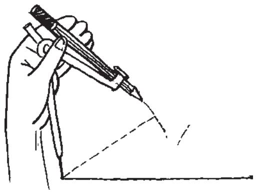
© NCERT not to be republished

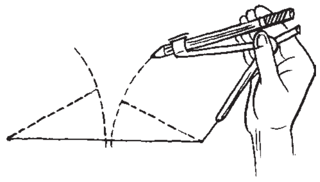
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



आकृति 10.4 : सोचिए, क्या यह सही है। सही है?

एक विद्यार्थी ने एक ऐसा त्रिभुज खींचने का प्रयत्न किया, जिसकी रफ़ आकृति यहाँ दी गई है। पहले उसने QR खींचा। फिर उसने Q को केंद्र मान कर और 3 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींची तथा R को केंद्र मान कर और 2 cm त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींची। परंतु वह P नहीं प्राप्त कर सका। इसका क्या कारण है? इस प्रश्न से संबंधित त्रिभुज के किस गुण को आप जानते हैं? क्या ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है? (त्रिभुजों के इस गुण को याद कीजिए: किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है)।





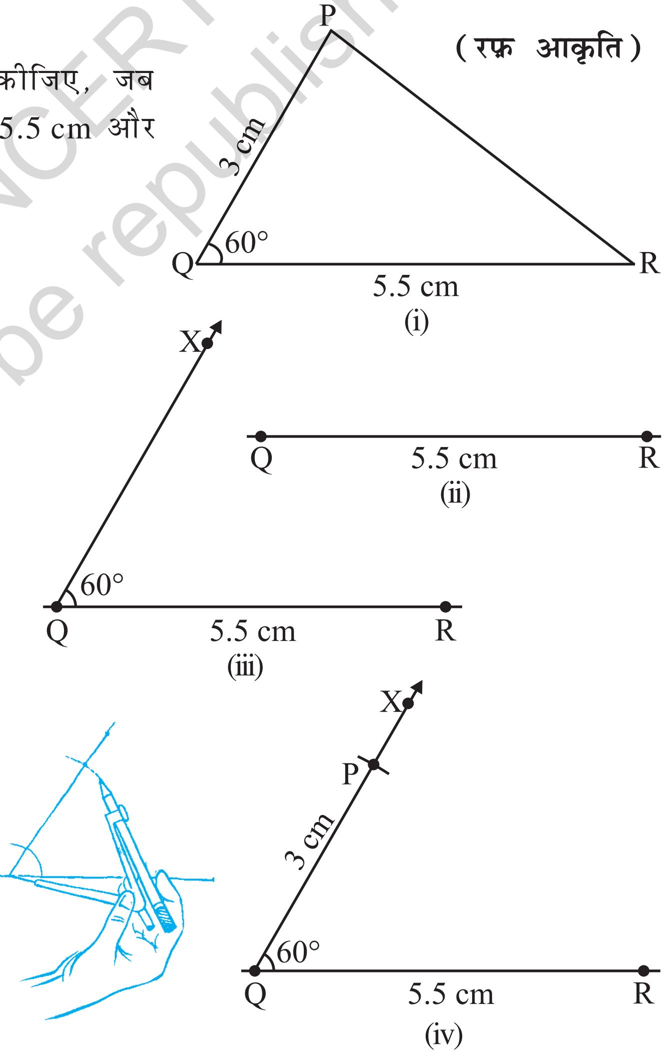
प्रश्नावली 10.2

1. ΔXYZ की रचना कीजिए, जिसमें $XY = 4.5$ cm, $YZ = 5$ cm और $ZX = 6$ cm है।
2. 5.5 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 4$ cm, $QR = 3.5$ cm और $PR = 4$ cm है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है?
4. ABC की रचना कीजिए, ताकि $AB = 2.5$ cm, $BC = 6$ cm और $AC = 6.5$ cm हो। $\angle B$ को मापिए।

10.5 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो (SAS कसौटी)

यहाँ, हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक रफ़ आकृति खींचते हैं और फिर दिए हुए रेखाखंडों में से एक रेखाखंड खींचते हैं। इसके बाद अन्य चरणों का अनुसरण किया जाता है। उदाहरण 2 देखिए।

उदाहरण 2 एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि $PQ = 3$ cm, $QR = 5.5$ cm और $\angle PQR = 60°$ है।



हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों के अनुसार, एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.5(i)]।

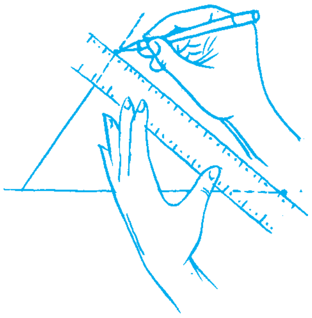
चरण 2 5.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड QR खींचिए [आकृति 10.5(ii)]।

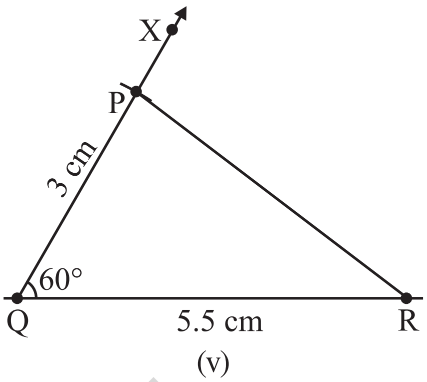
चरण 3 Q पर किरण QX खींचिए, जो QR के साथ 60° का कोण बनाए। (बिंदु P कोण की इसी किरण पर कहीं स्थित होगा) [आकृति 10.5(iii)]।

चरण 4 (P को निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है।) Q को केंद्र मान कर 3 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए। यह QX को बिंदु P पर काटता है। [आकृति 10.5(iv)]।

© NCERT not to be republished

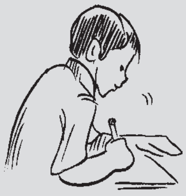
चरण 5 PR को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है [आकृति 10.5 (v)]।





आकृति 10.5 (i)-(v)

इन्हें कीजिए



आईए अब एक अन्य त्रिभुज ABC की रचना करें ताकि AB = 3 cm, BC = 6.5 cm और $\angle ABC = 60°$ हो। इस ΔABC को काट कर ΔPQR पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि ΔABC पूर्णतया ΔPQR के साथ संपाती हो जाता है, अर्थात् उसे ढक लेता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके मध्य स्थित (बीच का) कोण एक अन्य त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके मध्य स्थित कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SAS सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई दो भुजाओं और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण द्वारा की गई है।)

© NCERT not to be republished

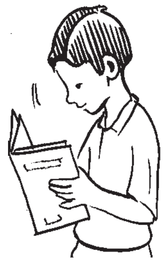
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त रचना में, दो भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कोण का माप दिया हुआ था। अब, निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

एक ΔABC में, यदि AB = 3 cm, AC = 5 cm और $\angle C = 30°$ है, तो क्या हम इस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? हम AC = 5 cm खींच कर, $\angle C = 30°$ खींच सकते हैं। $\angle C$ की एक भुजा CA है। बिंदु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए। परंतु, ध्यान दीजिए कि बिंदु B को एक अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अत:, त्रिभुज ABC की रचना करने के लिए, दिए हुए आँकड़े पर्याप्त नहीं हैं।

अब ΔABC की रचना करने का प्रयत्न कीजिए, जब AB = 3 cm, AC = 5 cm और $\angle B = 30°$ है। हम क्या प्रेक्षित करते हैं? पुन:, ΔABC की रचना अद्वितीय रूप से नहीं की जा सकती है। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ हो।

प्रश्नावली 10.3



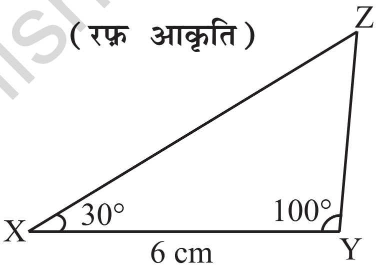
1. ΔDEF की रचना कीजिए, ताकि DE = 5 cm, DF = 3 cm और m$\angle$EDF = 90° हो।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लंबाई 6.5 cm हो और उनके बीच का कोण 110° का हो।
3. BC = 7.5 cm और AC = 5 cm और m$\angle$C = 60° वाले ΔABC की रचना कीजिए।

10.6 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों के बीच की भुजा की लंबाई दी हो (ASA कसौटी)

जैसा पहले किया था, एक रफ़ आकृति खींचिए। अब, दिया हुआ रेखाखंड खींचिए। दोनों अंत बिंदुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

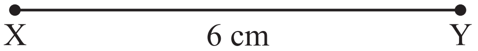
उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि, XY = 6 cm, m$\angle$ZXY = 30° और m$\angle$XYZ = 100° है।

हल



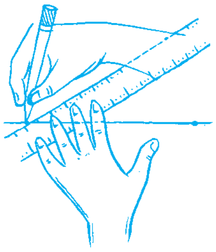
(i)

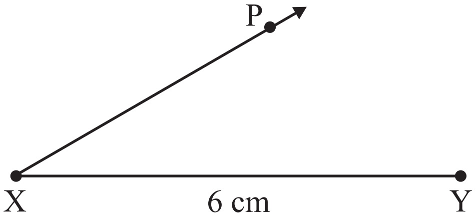
चरण 1 वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे कुछ अनुमान लग जाता है कि कैसे रचना की जाए) [आकृति 10.6(i)]।



(ii)

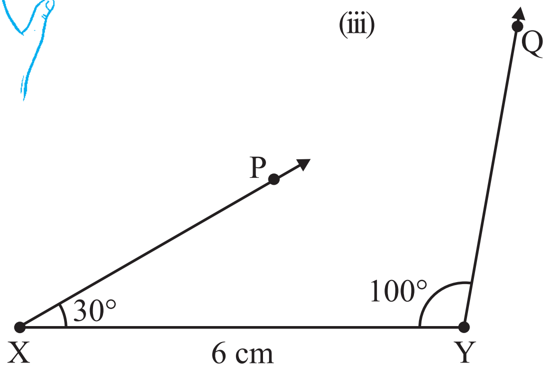
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखाखंड XY खींचिए [आकृति 10.6(ii)]।





(iii)

चरण 3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिंदु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iii)]।

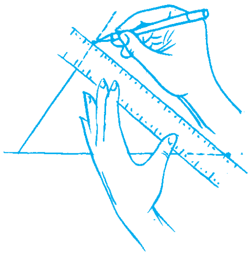


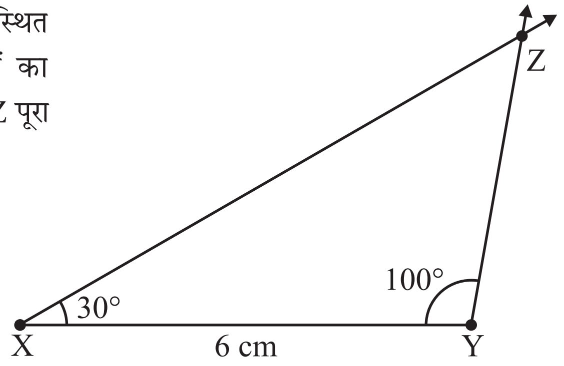
(iv)

चरण 4 Y पर एक किरण YQ खींचिए, जो YX से 100° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iv)]।

© NCERT not to be republished

चरण 5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अत:, इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिंदु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है [आकृति 10.6(v)]।





(v)

आकृति 10.6 (i) - (v)

इन्हें कीजिए

अब एक अन्य त्रिभुज LMN खींचिए, जिसमें $m\angle NLM = 30°$, LM = 6 cm और $m\angle NML = 100°$ हो। इस त्रिभुज LMN को काटकर त्रिभुज XYZ पर रखिए। हम देखते हैं कि त्रिभुज LMN त्रिभुज XYZ के साथ पूर्णतया संपाती हो जाता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और उनके मध्य स्थित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह ASA सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि यहाँ दो त्रिभुजों की रचना की गई है, जब दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दी गई है।)

© NCERT not to be republished

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, एक भुजा की लंबाई और दो कोणों के माप दिए गए थे। अब निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

ΔABC, में, यदि AC = 7 cm, $m\angle A = 60°$ और $m\angle B = 50°$ है, तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? (त्रिभुज का कोण योग गुण आपकी सहायता कर सकता है!)

प्रश्नावली 10.4

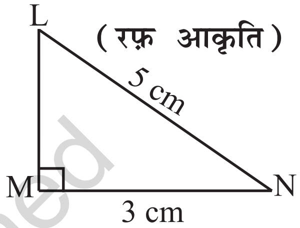
1. ΔABC, की रचना कीजिए, जब $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 30°$ और AB = 5.8 cm दिया है।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि PQ = 5 cm, $m\angle PQR = 105°$ और $m\angle QRP = 40°$ दिया है।

   (संकेत : त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)।
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि EF = 7.2 cm, $m\angle E = 110°$ और $m\angle F = 80°$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10.7 एक समकोण त्रिभुज की रचना, जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लंबाईयाँ दी हुई हों। (RHS कसौटी)

यहाँ, रफ़ आकृति बनाना सरल है। अब दी हुई भुजा के अनुसार, एक रेखाखंड खींचिए। इसके एक अंत: बिंदु पर एक समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लंबाइयों की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए :

उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका $\angle LMN$ समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 cm और MN = 3 cm ।

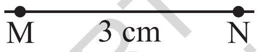


(i)

हल

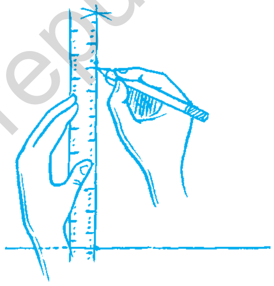
चरण 1 एक रफ़ आकृति खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए (आकृति 10.7(i))।

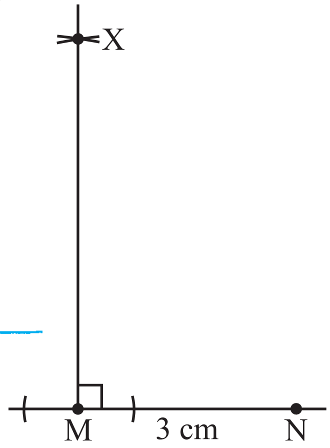
चरण 2 3 cm लंबाई का रेखाखंड MN खींचिए। [आकृति 10.7(ii)]



(ii)

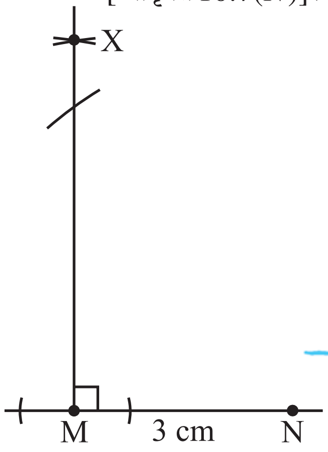
चरण 3 M पर MX ⊥ MN खींचिए। (L इसी लंब पर कहीं स्थित होना चाहिए) [आकृति 10.7(iii)]।



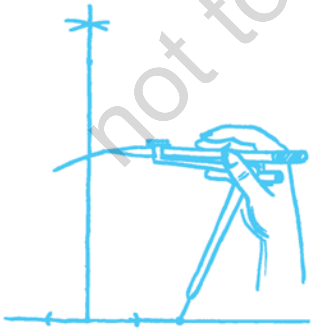


(iii)

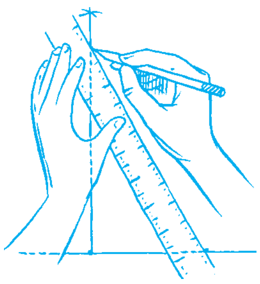
चरण 4 N को केंद्र मानकर, 5 cm त्रिज्या का एक चाप खींचिए।(L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए, क्योंकि यह N से 5 cm की दूरी पर है) [आकृति 10.7(iv)]।

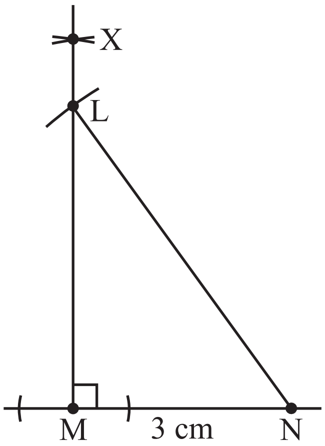


(iv)



चरण 5 L को लंब रेखा MX पर और केंद्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अत:, L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिंदु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है। [आकृति 10.7(v)]।





(v)

आकृति 10.7 (i)-(v)

प्रश्नावली 10.5

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle Q = 90°$, $QR = 8$ cm और $PR = 10$ cm है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 cm लंबा है और एक पाद 4 cm लंबा है।
3. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle ACB = 90°$ है और $AC = 6$ cm है।

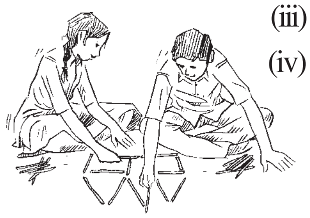
विविध प्रश्न

नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों के माप दिए गए हैं। इनमें से उनकी पहचान कीजिए, जिनकी रचना नहीं की जा सकती तथा यह भी बताइए कि आप इनकी रचना क्यों नहीं कर सकते। शेष त्रिभुजों की रचना कीजिए।

	त्रिभुज	दिए हुए माप		
1.	ΔABC	$m\angle A = 85°$,	$m\angle B = 115°$,	$AB = 5$ cm
2.	ΔPQR	$m\angle Q = 30°$,	$m\angle R = 60°$,	$QR = 4.7$ cm
3.	ΔABC	$m\angle A = 70°$,	$m\angle B = 50°$,	$AC = 3$ cm
4.	ΔLMN	$m\angle L = 60°$,	$m\angle N = 120°$]	$LM = 5$ cm
5.	ΔABC	$BC = 2$ cm,	$AB = 4$ cm,	$AC = 2$ cm
6.	ΔPQR	$PQ = 3.5$ cm,	$QR = 4$ cm,	$PR = 3.5$ cm
7.	ΔXYZ	$XY = 3$ cm,	$YZ = 4$ cm,	$XZ = 5$ cm
8.	ΔDEF	$DE = 4.5$ cm,	$EF = 5.5$ cm,	$DF = 4$ cm

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में हमने पैमाना (रूलर) और परकार की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।

1. एक दी हुई रेखा और ऐसे बिंदु के लिए जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, हमने तिर्यक छेदी रेखा आकृति में, रेखा के समांतर एक रेखा खींचने के लिए समान एकांतर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
   इस रचना के लिए हम समान संगत कोणों की अवधारणा का उपयोग भी कर सकते हैं।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।
   इस अध्याय में निम्नलिखित उदाहरणों की चर्चा की गई है।
   (i) SSS: त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई दी हुई है।
   (ii) SAS: किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई और इन भुजाओं के मध्य स्थित कोण का माप दिया हुआ है।
   (iii) ASA: दो कोणों के माप और इनके मध्य स्थित भुजा की लंबाई दी हुई है।
   (iv) RHS: समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं एक पाद की लंबाई दी हुई है।