

प्रादर्श प्रश्न-पत्र
MODEL QUESTION PAPER

उच्च गणित
HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे
Time : 3 hours

कक्षा . 12^{वीं}
Class - XIIth

पूर्णांक : 100
M.M. : 100

निर्देश :-

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
2. प्रश्न पत्र में दिये गये निर्देश सावधानी पूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. प्रश्न पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं - खण्ड-अ और खण्ड-ब ।
4. खण्ड-अ में दिये गये प्रश्न 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, जिसके अन्तर्गत रिक्त स्थानों की पूर्ति, सत्य/असत्य तथा सही विकल्प वाले प्रश्न हैं । प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है ।
5. खण्ड-ब में प्रश्न क्रमांक - 06 से 21 तक में आंतरिक विकल्प दिये गये हैं ।
6. प्रश्न क्रमांक - 06 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आवंटित हैं ।
5. प्रश्न क्रमांक - 13 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आवंटित हैं ।
6. प्रश्न क्रमांक - 20 से 21 तक प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आवंटित हैं ।

Instructions :-

1. All questions are compulsory.
2. Read the Instructions of question paper carefully and write their answer.
3. There are two parts - Section-A and Section-B in the question paper.
4. In Section-A Question No. 1 to 5 are Objective type, which contain Fill up the blanks, True/False, Match the column, One word answer and Choose the correct answer. Each question is allotted 5 marks.
5. Internal options are given in Question No. 06 to 21 of Section-B.
6. Question No. 06 to 12 carry 4 marks each.
7. Question No. 13 to 19 carry 5 marks each.
8. Question No. 20 to 21 carry 6 marks each.

(खण्ड-अ)

(Section-A)

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(Objective Type Question)क

- प्र.01 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्नों में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर लिखिए । (5) अंक
Write the correct answer from the given option provided in every objective type questions. (5 Marks)

Cont...2

(अ) $\frac{1}{x(x+9)}$ की आंशिक भिन्न है :

- (i) $\frac{1}{9x} + \frac{1}{9(x+9)}$ (ii) $\frac{1}{9x} - \frac{1}{(x+9)}$ (iii) $-\frac{1}{9x} - \frac{1}{9(x+9)}$
 (iv) $\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+9)}$

(A) Partial fraction of $\frac{1}{x(x+9)}$ is :

- (i) $\frac{1}{9x} + \frac{1}{9(x+9)}$ (ii) $\frac{1}{9x} - \frac{1}{(x+9)}$ (iii) $-\frac{1}{9x} - \frac{1}{9(x+9)}$
 (iv) $\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+9)}$

(ब) $3\tan^{-1} a$ बराबर है :

- (i) $\tan^{-1} \frac{3a+a^3}{1+3a^2}$ (ii) $\tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1+3a^2}$ (iii) $\tan^{-1} \frac{3a+a^3}{1-3a^2}$ (iv) $\tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1-3a^2}$

(B) The value of $3\tan^{-1} a$ is :

- (i) $\tan^{-1} \frac{3a+a^3}{1+3a^2}$ (ii) $\tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1+3a^2}$ (iii) $\tan^{-1} \frac{3a+a^3}{1-3a^2}$ (iv) $\tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1-3a^2}$

(स) बिन्दु (7, 8, 9) की समतल y z से दूरी है :

- (i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) $\sqrt{194}$

(C) Distance of the point (7, 8, 9) from the y z plane is :

- (i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) $\sqrt{194}$

(द) अक्षों से $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ के अंतः खण्ड काटने वाले समतल का समीकरण है :

- (i) $2x + 3y + 4z = 1$ (ii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$
 (iii) $6x + 4y + 3z = 12$ (iv) $x + y + z = 12$

(D) The equation of the plane which intercepts $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ from the co-ordinate axes is :

- (i) $2x + 3y + 4z = 1$ (ii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$
 (iii) $6x + 4y + 3z = 12$ (iv) $x + y + z = 12$

(इ) यदि $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ तथा $\vec{b} = 3\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$ परस्पर लम्ब हैं तो π का मान होगा :

- (i) 0 (ii) 3 (iii) -3 (iv) 1

(E) If the vectors $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ and $\vec{b} = 3\vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}$ are perpendicular, then the value of π is :

- (i) 0 (ii) 3 (iii) -3 (iv) 1

प्र.02 निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइये :

(5) अंक

- (i) सदिश योग क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है ।
 (ii) यदि $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ तथा $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ है तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान शून्य होगा ।
 (iii) $\frac{d}{dx}(\sin^2 x)$ का मान $\sin 2x$ है ।
 (iv) सहसम्बन्ध गुणांक, समाश्रयण गुणाकों का समान्तर माध्य होता है ।
 (v) सहसम्बन्ध गुणांक का मान -1 और +1 के मध्य होता है ।

Write True/False in the following statements :

(5 Marks)

- (a) The addition of vectors follow the commutative law.
 (b) If $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ and $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ then the value of $\vec{a} \cdot \vec{b}$ will be zero.
 (c) Value of $\frac{d}{dx}(\sin^2 x)$ is $\sin 2x$.
 (d) Coefficient of co-relation is the arithmetic mean of regression coefficients.
 (e) The value of co-relation coefficient lies between -1 and +1.

प्र.03 सही जोड़ी बनाइये :

(5) अंक

(अ)

(ब)

- | | |
|---|----------------------------------|
| (i) <input type="checkbox"/> $\tan x \cdot dx$ | (a) $\frac{1}{a} \tan(ax+b)$ |
| (ii) <input type="checkbox"/> $a^x \cdot dx$ | (b) $\frac{x^2}{2}$ |
| (iii) <input type="checkbox"/> $\sec^2(ax+b) \cdot dx$ | (c) $\log \sec x$ |
| (iv) <input type="checkbox"/> $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | (d) $\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ |
| (v) <input type="checkbox"/> $e^{\log x} - dx$ | (e) $\frac{a^x}{\log_e a}$ |

Match the column :

(5 Marks)

(A)

(B)

- | | |
|---|----------------------------------|
| (i) <input type="checkbox"/> $\tan x \cdot dx$ | (a) $\frac{1}{a} \tan(ax+b)$ |
| (ii) <input type="checkbox"/> $a^x \cdot dx$ | (b) $\frac{x^2}{2}$ |
| (iii) <input type="checkbox"/> $\sec^2(ax+b) \cdot dx$ | (c) $\log \sec x$ |
| (iv) <input type="checkbox"/> $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ | (d) $\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ |
| (v) <input type="checkbox"/> $e^{\log x} - dx$ | (e) $\frac{a^x}{\log_e a}$ |

Cont...4

प्र.04 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :-

(5) अंक

- (i) गोले $(x-2)(x+2) + (y-3)(y+3) + (z-4)(z+4) = 0$ का केन्द्र $(0,0,0)$ तथा त्रिज्या है ।
- (ii) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{5}$ सरल रेखा बिन्दु से होकर जाती है ।
- (iii) यदि \vec{p} और \vec{q} समानान्तर है तो $\vec{p} = \dots\dots\dots$ है ।
- (iv) यदि $y=x^n$ हो तो y का n वाँ अवकलज होगा ।
- (v) एक चर त्रिज्या वाले गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या 3 से.मी. है उसके आयतन परिवर्तन की दर होगी ।

Fill in the blanks :-

(5 Marks)

- (a) The centre $(0,0,0)$ and radius of the sphere $(x-2)(x+2) + (y-3)(y+3) + (z-4)(z+4) = 0$
- (b) Straight line $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{5}$ passes through the point
- (c) If \vec{p} and \vec{q} are parallel then $\vec{p} = \dots\dots\dots$
- (d) If $y=x^n$ then the n^{th} differentiation of y will be
- (e) A spherical Balloon having a variable radius of 3 c.m. then rate of change of volume will be

प्र.05 निम्न प्रश्नों में प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

(5) अंक

- (i) संख्यात्मक समीकरण के वास्तविक मूल ज्ञात करने की सबसे प्राचीन विधि का नाम लिखिये ।
- (ii) $0.653172 \text{ E } 05 - 0.589185 \text{ E } 05 = \dots\dots\dots$
- (iii) न्यूटन रैफसन विधि द्वारा किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र लिखिये ।
- (iv) समलम्ब चतुर्भुज विधि का सूत्र लिखिये ।
- (v) $\int_a^b f(x) dx$ के लिये सिम्पसन नियम सूत्र लिखिये ।

Write the answer in one word/sentence each.

(5 Marks)

- (a) Write the name of Ancient method to find out the real root of a Numerical Equation.
- (b) $0.653172 \text{ E } 05 - 0.589185 \text{ E } 05 = \dots\dots\dots$

- (c) Write down the formula of Newton Raphson method to find out the square root of a number.
- (d) Write down the formula of Trapezoidal method.
- (e) Write down the Simpson's rule formula for $\int_a^b f(x) dx$.

(खण्ड-ब)

(Section-B)

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Very Short Answer type Question)

(प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक)

प्र.06 $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ को आंशिक भिन्नो में व्यक्त कीजिए ।

(4) अंक

Express into partial fraction $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$

अथवा OR

$\frac{x^3}{(1-x)^4}$ को आंशिक भिन्नो में व्यक्त कीजिए ।

Express into partial fraction $\frac{x^3}{(x-1)^4}$

प्र.07 यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ हो तो सिद्ध कीजिये कि $xy + yz + zx = 1$

If $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ the prove that $xy + yz + zx = 1$ (4) अंक

अथवा OR

हल कीजिए :

$$\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1} \frac{2b}{1+b^2} = 2 \tan^{-1}x$$

Solve the equation :

$$\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1} \frac{2b}{1+b^2} = 2 \tan^{-1}x$$

प्र.08 यदि $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो ।

(4) अंक

If $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$ then find the value of $\frac{dy}{dx}$.

अथवा OR

यदि $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ हो तो का $\frac{dy}{dx}$ मान ज्ञात करो ।

If $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, Then find the value of $\frac{dy}{dx}$

प्र.09 $\tan 3x$ का प्रथम सिद्धांत से अवकलन ज्ञात कीजिए । (4) अंक

Differentiate $\tan 3x$ by first principle.

अथवा OR

यदि $\sin y = x \cos (a+y)$ हो तो दर्शाईये कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$

If $\sin y = x \cos (a+y)$ then show that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a}$

प्र.10 एक कण समीकरण $s = t^3 - 9t^2 + 3t + 1$ के अनुसार एक सरल रेखा में गतिमान है । जहाँ s मीटर में तथा t सेकेण्ड में नापे जाते हैं । यदि कण का वेग -24 मी./से. हो, तो कण का त्वरण ज्ञात कीजिए । (4) अंक

A particle is moving in a straight line according to the law $s = t^3 - 9t^2 + 3t + 1$, Where s represents the distance measured in metre and time t in second. If the velocity of the particle is -24 m/.sec., Find the acceleration of the particle.

अथवा OR

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x - \cos x$, x के सभी मानों के लिये वर्धमान है ।

Show that $f(x) = x - \cos x$ is increasing for all x .

प्र.11 सिद्ध कीजिए कि दो स्वतन्त्र चरों के लिये कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक शून्य होता है । उदाहरण देकर दर्शाईये कि इसका विलोम सत्य नहीं है । (4) अंक

For the two independent variables prove that Karl Pearson's correlation coefficient is zero. Show by an example that its converse is not true.

अथवा OR

निम्नांकित आंकड़ों के लिये x और y में सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए ।

x : 65 66 67 68 69 70 71

y : 67 68 66 69 72 72 69

Calculate the correlation coefficient between x and y for the following data :

x : 65 66 67 68 69 70 71

y : 67 68 66 69 72 72 69

प्र.12 यदि समाश्रयण रेखाओं के बीच कोण θ हो तो सिद्ध कीजिए : (4) अंक

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{\frac{P^2 - 1}{P}} \right|$$

If angle between two regression lines is θ then prove that :

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{\frac{P^2 - 1}{P}} \right|$$

अथवा OR

निम्नांकित सारणी द्वारा ग्वालियर में 70 रु. मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक उचित मूल्य ज्ञात कीजिए ।

	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	65	67
मानक विचलन	2.5	3.5

दो नगरों में वस्तु के मूल्यों में सहसम्बंध गुणांक 0.8 है ।

An article cost Rs. 70. at Gwalior. Find the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data :

	Gwalior	Bhopal
Mean Value	65	67
Standard Deviation	2.5	3.5

The correlation between the values of the two cities is 0.8.

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक)

(Short Answer Type Question)

(5 Marks Each)

प्र.13 ΔABC के कोण A की कोज्या की गणना कीजिए जबकि शीर्ष A (1,-1,2), B (6,11,2) तथा C (1,2,6) है । (5) अंक

Calculate the cosine of Angle A of ΔABC whose vertices are A (1,-1,2), B (6,11,2) and C (1,2,6).

अथवा OR

उस समतल का समी. ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (2,2,-1) से होकर जाता है तथा

रेखाएँ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ तथा $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ के समानान्तर है ।

Find the equation of the plane which passes through the point (2,2,-1) and is parallel to lines $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ and $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$

Cont...8

प्र.14 सदिश विधि से सिद्ध करो कि

(5) अंक

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Prove by vector method that

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

अथवा OR

यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ तथा $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ हो तो सिद्ध कीजिए :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

If $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ and $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ then prove that

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

प्र.15 सिद्ध करो कि : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$; $n \in \mathbb{N}$

(5) अंक

Prove that : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$; $n \in \mathbb{N}$

अथवा OR

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 2x}$ की गणना करो ।

Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 2x}$

प्र.16 परवल्यों $y^2 = 4ax$ एवं $x^2 = 4ay$ से घिरे हुये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो । (5) अंक

Find the area included between the parabola's $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$

अथवा OR

निम्नलिखित का मान ज्ञात करो :-

$$\int_{-a}^a \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} .dx$$

Evaluate :-

$$\int_{-a}^a \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} .dx$$

प्र.17 सिद्ध कीजिये कि :-

(5) अंक

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} .dx = \pi a$$

Prove that :-

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} .dx = \pi a$$

अथवा OR

$\int \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2} .dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।

Evaluate : $\int \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2} .dx$

प्र.18 अवकल समीकरण $(1-x^2) dy + xy dx = xy^2 dx$ को हल कीजिए । (5) अंक

Solve the differential equation $(1-x^2) dy + xy dx = xy^2 dx$

अथवा OR

अवकल समी. हल कीजिए :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

Solve the differential equation :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

प्र.19 एक दौड़ में तीन घोड़े, A,B,C भाग लेते हैं । A के जीतने की संभावना B से दुगुनी है और B के जीतने की संभावना C से दुगुनी है । प्रत्येक के जीतने की क्या प्रायिकता है, इस बात की भी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दौड़ में घोड़ा B या C जीतेगा ? (5) अंक

A,B and C are three horses participating in a race. The chance of A's win is double of B and chance of B's win is double of C. Find out the probability for winning of each of team. Also find the probability that horse B or C win the race.

अथवा OR

एक पाँसे को तीन बार फेंकने पर संख्या 6 आने का प्रायिकता बंटन घात कीजिए ।

Find the probability distribution of the number of sixes in three throws of a dice.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक)

(Long Answer Type Question)

(6 Marks Each)

प्र.20 दर्शाइये कि रेखाओं $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$ प्रतिच्छेद करती है । इनका प्रतिच्छेद बिन्दु एवम् समतल का समी. जिसमें यह बिन्दु स्थित है, ज्ञात कीजिये । (6) अंक

Show that the lines $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$ and $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+7}{2}$ are intersection. Find the point of intersection and the plane in which they lie.

अथवा OR

एक समतल स्थित बिन्दु (a,b,c) से गुजरता है । दर्शाईये कि इस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ, गोला $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ है ।

A plane passes through a fixed point (a,b,c) show that the locus of the foot of the perpendicular to it from the origin is the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

प्र.21 सरल रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जिनके सदिश समीकरण

निम्नानुसार हैं :-

(6) अंक

$$r = 3i + 8j + 3k + \lambda (3i + j + k)$$

$$r = 3i + 7j + 6k + \mu (-3i + 2j + 4k)$$

Find the shortest distance between two lines, whose vector equations are :-

$$r = 3i + 8j + 3k + \lambda (3i + j + k)$$

$$r = 3i + 7j + 6k + \mu (-3i + 2j + 4k)$$

अथवा OR

एक गोला बिन्दुओं (0,-2,-4) तथा (2,-1,-1) से गुजरता है तथा इसका केन्द्र रेखा $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ पर स्थित है । गोले का समी. ज्ञात कीजिए ।

A sphere passes through the points (0,-2,-4) and (2,-1,-1). Its centre lies on the lines $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$. Find out the equation of the sphere.

आदर्श उत्तर

MODEL ANSWER

उच्च गणित

HIGHER - METHEMATICS

समय : 3 घंटे
Time : 3 hours

कक्षा . 12^{वीं}
Class - XIIth

पूर्णांक : 100
M.M. : 100

प्र.01 उत्तर :-

प्रत्येक सही पर (1) अंक

(अ) (ii) $\frac{1}{9x} \quad \frac{1}{9(x+9)}$

(ब) (iv) $\tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1-3a^2}$

(स) (i) 7

(द) (i) $2x + 3y + 4z = 1$

(इ) (ii) 3

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.02 उत्तर :-

प्रत्येक सही पर (1) अंक

(vi) सत्य

(vii) असत्य

(viii) सत्य

(ix) असत्य

(x) सत्य

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.03 उत्तर :-

प्रत्येक सही पर (1) अंक

(i) (c) $\log \sec x$

(ii) (e) $\frac{a^x}{\log_e a}$

(iii) (a) $\frac{1}{a} \tan (ax+b)$

(iv) (d) $\log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

(v) (b) $\frac{x^2}{2}$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.04 उत्तर :-

प्रत्येक सही पर (1) अंक

(vi) त्रिज्या = $\sqrt{29}$

(vii) बिन्दु (-1,1,-4)

(viii) $\vec{p} = \lambda \vec{q}$

(ix) $\perp n$

(x) 36π घन से.मी. प्रति सेकण्ड unit time

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

Cont...2

प्र.05 उत्तर :-

प्रत्येक सही पर (1) अंक

(vi) मिथ्या आवासीय विधि

(vii) 0.63987 E 04

(viii) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right)$

(ix) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n]$ जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

(x) $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.06 उत्तर :-

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6} = \frac{5x-11}{(x+2)(2x-3)}$$

$$\frac{5x-11}{(x+2)(2x-3)} = \frac{A}{x+2} = \frac{B}{2x-3} \quad (1)$$

$$5x - 11 = A(2x-3) + B(x+2)$$

सरल करने पर

$$A = 3, \quad B = 1 \quad (2)$$

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6} = \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{2x-3} \quad (1)$$

(कुल 1+2+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$\frac{x^3}{(1-x)^4}$$

$$\text{माना } y = 1 - x$$

$$x = 1 - y$$

$$\frac{x^3}{(1-x)^4} = \frac{(1-y)^3}{y^4} \quad (1)$$

$$= \frac{1 - y^3 - 3y + 3y^2}{y^4}$$

$$= \frac{1}{y^4} - \frac{y^3}{y^4} - \frac{3y}{y^4} + \frac{3y^2}{y^4}$$

$$= \frac{1}{y^4} - \frac{1}{y} - \frac{3}{y^3} + \frac{3}{y^2}$$

$$= \frac{1}{y^4} - \frac{3}{y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{1}{y} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \quad (1)$$

(कुल 1+2+1 = 4 अंक)

Cont...3

प्र.07 का हल :-

$$\text{यदि } \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{माना } \tan^{-1}x = \alpha, \tan^{-1}y = \beta, \tan^{-1}z = \gamma$$

$$x = \tan \alpha, y = \tan \beta, z = \tan \gamma \quad (1)$$

$$= \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \cot \gamma$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{\tan\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1}{z}$$

$$xz + yz = 1 - xy$$

$$xy + yz + zx = 1 \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1} \frac{2b}{1+b^2} = 2 \tan^{-1}x$$

$$2 \tan^{-1} a + 2 \tan^{-1} b = 2 \tan^{-1} x \quad (1)$$

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} x$$

$$\tan^{-1} \frac{a+b}{1-ab} = \tan^{-1} x \quad (2)$$

$$x = \frac{a+b}{1-ab} \quad (1)$$

(कुल 1+2+1 = 4 अंक)

प्र.08 का हल ।

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\text{माना } x^2 = \cos\theta \text{ या } \theta = \cos^{-1}x^2 \quad (1)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{1-\cos\theta}} \right)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} - \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}} \right) \quad (1)$$

Cont...4

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$y = \tan^{-1} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \cos^{-1} x^2 \quad (1)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} \times 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x}) \frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \quad (2)$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - (e^{2x} + e^{-2x} + 2)}{(e^x - e^{-x})^2} \quad (1)$$

$$= \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} \quad (1)$$

(कुल 2+1+1 = 4 अंक)

प्र.09 का हल

माना $f(x) = \tan 3x$

$$f(x+h) = \tan 3(x+h)$$

प्रथम सिद्धांत से

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

Cont...5

$$\frac{d}{dx} (\tan 3x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(3x+3h) - \tan 3x}{h} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+3h) \cos 3x - \sin 3x \cos(3x+3h)}{h \cos(3x+3h) \cos 3x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\cancel{3x} + 3h - \cancel{3x})}{h \cos(3x+3h) \cos 3x} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3h}{3h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(3x+3h) \cos 3x}$$

$$= 3 \times 1 \times \frac{1}{\cos 3x \cdot \cos 3x}$$

$$= 3 \frac{1}{\cos^2 3x}$$

$$= 3 \sec^2 3x \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$\sin y = x \cos(a+y) \text{ या } x = \frac{\sin y}{\cos(a+y)}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\cos y \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \cos(a+y) + \cos(a+y) \frac{d}{dx} .x \quad (1)$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = -x \sin(a+y) \frac{dy}{dx} + \cos(a+y) \cdot 1$$

$$[\cos y + x \sin(a+y)] \frac{dy}{dx} = \cos(a+y)$$

$$\left[\cos y + \frac{\sin y}{\cos(a+y)} \sin(a+y) \right] \frac{dy}{dx} = \cos(a+y) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\cos(a+y) \cos y + \sin(a+y) \sin y}{\cos(a+y)} \right) \frac{dy}{dx} = \cos(a+y)$$

$$\cos(a+y-y) \frac{dy}{dx} = \cos^2(a+y) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos a} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.10 का हल

$$s = t^3 - 9t^2 + 3t + 1 \quad \text{----- (i)}$$

समीकरण (i) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 3 \quad \text{----- (ii)}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18 \quad \text{----- (iii)} \quad (1)$$

जब वेग = -24 m/s तब समीकरण (ii) से

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -24 = 3t^2 - 18t + 3 \\ t^2 - 6t + 9 &= 0 \\ &= (t-3)^2 = 0 \\ t &= 3 \text{ sec} \end{aligned} \quad (2)$$

समीकरण (iii) से $t = 3 \text{ sec}$ पर त्वरण,

$$\text{त्वरण} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6 \times 3 - 18 = 0 \quad (1)$$

अर्थात् जब वेग -24 m/sec. होगा, तब त्वरण शून्य होगा ।

(कुल 1+2+1 = 4 अंक)

अथवा OR

$$f(x) = x - \cos x$$

$$f^1(x) = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x \quad (1)$$

x के सभी मानों के लिये $\sin x$ का मान -1 व 1 के बीच होता होता है ।

अर्थात् x के सभी मानों के लिए $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{या } -1 + 1 \leq \sin x + 1 \leq 1 + 1$$

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \quad (2)$$

$$1 + \sin x \geq 0$$

$$\text{या } f^1(x) \geq 0 \quad (1)$$

आतः समी. x के लिए $f^1(x)$ वर्धमान फलन है ।

(कुल 1+2+1 = 4 अंक)

प्र.11 यदि x और y दो स्वतंत्र चर हैं तो $\text{cov}(x,y) = 0$

$$\therefore \sigma_{(a,y)} = \frac{\text{cov}(x,y)}{n \cdot y} = \frac{0}{x \cdot y} = 0$$

अतः दो स्वतंत्र चरों के लिए कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक शून्य होता है । (1)

विलोम :-

उदाहरण	x :	-3	-2	-1	0	1	2	3	(1)
	y :	9	4	1	0	1	4	9	

$$\text{यहाँ } \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 28, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad n = 7$$

$$\begin{aligned} \text{तब } \text{cov}(x,y) &= \frac{1}{n} [\sigma_{xy} - \frac{1}{n} \sigma_x \sigma_y] \\ &= \frac{1}{7} [0 - \frac{1}{7} \times 0 \times 28] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\therefore P(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

हम देखते हैं कि x व y में सहसंबंध नहीं हैं परन्तु ये चर समीकरण $y = x^2$ को संतुष्ट करते हैं ।

\therefore x व y एक दूसरे से स्वतंत्र नहीं हैं । (1)

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
65	67	-3	-2	6	9	4
66	68	-2	-1	2	4	1
67	66	-1	-3	3	1	9
68	69	0	0	0	0	0
69	72	1	3	3	1	9
70	72	2	3	6	4	9
71	69	3	0	0	9	0
476	483	0	0	20	28	32

(2)

$$x = 68, \quad y = 69$$

$$\sum (x-x)(y-y) = 20$$

$$p = \frac{\sum (x-x)(y-y)}{\sqrt{\sum (x-x)^2} \sqrt{\sum (y-y)^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{20}{\sqrt{28} \sqrt{32}}$$

$$= 0.67 \quad (1)$$

(कुल 2+1+1 = 4 अंक)

प्र.12 का हल

y की x पर समाश्रयण रेखा का समी. है

$$y-\bar{y} = b_{yx} (x-\bar{x}) \quad (1)$$

$$\text{या } y = b_{yx} X + (\bar{y} - b_{yx}\bar{X})$$

\therefore इस रेखा की प्रवणता $m_1 = b_{yx}$

x की y पर समाश्रयण रेखा का समी. है

$$x-\bar{x} = b_{xy} (y-\bar{y}) \quad (1)$$

$$\text{या } Y = \frac{1}{b_{xy}} X + \left(y - \frac{1}{b_{xy}} \cdot \bar{x} \right)$$

\therefore इस रेखा की प्रवणता $m_2 = \frac{1}{b_{xy}}$

यदि दोनों रेखाओं के बीच का न्यून कोण θ हो तो

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = \left| \frac{b_{yx} - \frac{1}{b_{xy}}}{1 + b_{yx} \cdot \frac{1}{b_{xy}}} \right| \quad (1)$$

$$= \left| \frac{b_{yx} \cdot b_{xy} - 1}{b_{yx} + b_{xy}} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{P \cdot \bar{y}}{\bar{x}} \cdot P \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} - 1}{P \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + P \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{x}}}} \right| \quad (1)$$

$$= \left| \frac{P^2 - 1}{P \left(\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \right)} \right|$$

$$\therefore \tan \theta = \left| \frac{\frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{P} \right|$$

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

अथवा OR

माना ग्वालियर और भोपाल के मूल्यों को क्रमशः चर x और y लिया तो

$$\bar{x} = 65, \bar{y} = 67$$

$$\bar{x} = 2.5, \bar{y} = 3.5 \text{ तथा } P = 0.8 \quad (1)$$

y की x पर समाश्रयण रेखा :

$$y - \bar{y} = \frac{P \bar{y}}{\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad (1)$$

$$y - 67 = \frac{0.8 \times 3.5}{2.5} (x - 65)$$

$$= y - 67 = \frac{28}{25} (x - 65)$$

$$= 25y = 28x - 1820 + 1675$$

$$25y = 28x - 145$$

$$y = 28x - 145$$

$$y = \frac{28}{25} x - \frac{28}{25}$$

यहाँ $x = 70$ के संगत y का मान ज्ञान करना है (1)

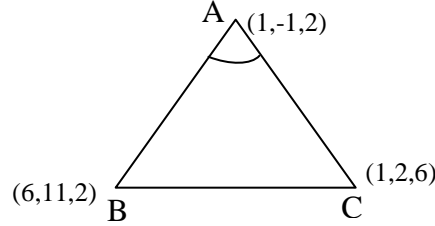
$$y = \frac{28}{25} \times 70 - \frac{29}{5}$$

$$= \frac{392 - 29}{5} = \frac{363}{5} = 72.6 \quad (1)$$

∴ अभीष्ट मूल्य = 72.6 रुपये

(कुल 1+1+1+1 = 4 अंक)

प्र.13 का हल ।



(1)

AB के दिक्अनुपात

$$6-1, 11+1, 2-2$$

$$\text{अर्थात् } (5,12,0)$$

यहाँ $a_1 = 5, b_1 = 12, c_1 = 0$ (1)

$$x_2 = 0, b_2 = 3, x_2 = 4$$

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{x_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{5 \times 0 + 12 \times 3 + 0 \times 4}{\sqrt{5^2 + 12^2 + 0} \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} \quad (1)$$

$$= \frac{36}{\sqrt{169} \sqrt{25}}$$

$$= \frac{36}{13 \times 5} = \frac{36}{65}$$

$$\cos\theta = \frac{36}{65} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

(2,2,-1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$a(x-2) + b(y-2) + c(z+1) = 0 \quad \text{----- (i)}$$

यह रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ तथा $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ के समान्तर है । (1)

$$\text{तब } 2a + 3b + 4c = 0 \quad \text{----- (ii)}$$

$$-2a + b + 3c = 0 \quad \text{----- (iii)}$$

$$= \frac{a}{9-4} = \frac{b}{-8-6} = \frac{c}{2+6}$$

$$= \frac{a}{5} = \frac{b}{-14} = \frac{c}{8} = k \text{ (माना)}$$

$$a = 5k, \quad b = -14k, \quad c = 8k \quad (1)$$

यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$5k(x-2) - 14k(y-2) + 8k(z+1) = 0 \quad (1)$$

$$k [5x - 10 - 14y + 28 + 8z + 8] = 0$$

$$5x - 14y + 8z + 26 = 0 \quad (1)$$

यही समतल का समीकरण होगा ।

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.14 का हल

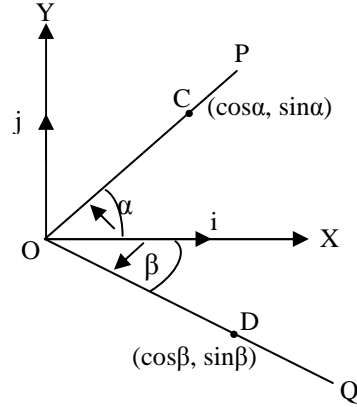
माना x- अक्ष और y- अक्ष के अनुदिश

\hat{i} व \hat{j} एकांक सदिश हैं ।

$$\angle POQ = \alpha + \beta$$

माना \vec{OC} व \vec{OD} क्रमशः OP व OQ के अनुदिश एकांक सदिश हैं, जिससे कि

$$|\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 1 \quad (1)$$



C व D के निर्देशांक क्रमशः $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ तथा $(\cos\beta, -\sin\beta)$ होंगे ।

$$|\vec{OC}| = |\vec{OD}| = 1 \quad (1)$$

$$\therefore \vec{OC} \cdot \vec{OD} = (1)(1) \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) \text{ ----- (i)}$$

$$\vec{OC} = (\cos\alpha) \hat{i} + (\sin\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{OD} = (\cos\beta) \hat{i} - (\sin\beta) \hat{j}$$

$$\vec{OC} \cdot \vec{OD} = [(\cos\alpha) \hat{i} + (\sin\alpha) \hat{j}] \cdot [(\cos\beta) \hat{i} - (\sin\beta) \hat{j}]$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \text{ ----- (ii)} \quad (1)$$

समीकरण (i) व (ii) से

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (1)$$

Cont...11

अथवा OR

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

(1)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(1)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 17\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k} \quad \text{----- (i)}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(1)

$$= -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

(1)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 11\vec{i} + 13\vec{j} + 10\vec{k} \quad \text{----- (ii)}$$

समी. (i) और (ii) से

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

(1)

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.15 का हल

माना $x - a = h$ या $x = a + h$

जब $x \rightarrow a$ तथा $h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{\cancel{a+h} - \cancel{a}} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n \left(1 + \frac{h}{a}\right)^n - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n}{h} \left[\left(1 + \frac{h}{a}\right)^n - 1 \right] \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n}{h} \left[\left\{ \cancel{1} + n \cdot \frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \dots \right\} \dots \cancel{1} \right] \quad (1)$$

Cont...12

---12---

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n}{h} \left[n \cdot \frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \dots \right] \quad (1)$$

$$= a^n \left[\frac{n}{a} + \text{शेष सभी पद शून्य} \right]$$

$$= \frac{n}{a} \cdot a^n$$

$$= na^{n-1} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{2 \sin^2 x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x \cos x} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

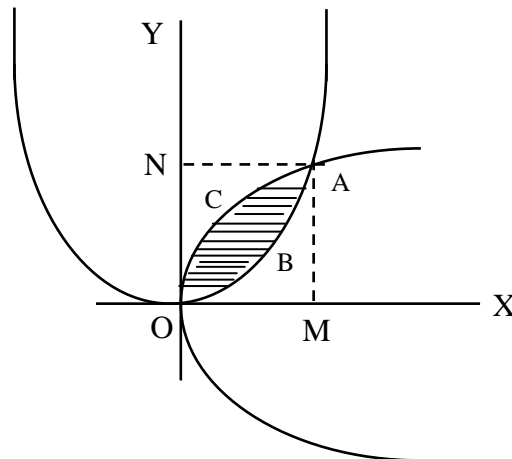
$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\cos 0}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.16 दिये हुए वक्रों को ग्राफ आकृति में दिखाया है । छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है । यह क्षेत्र OBACO है ।



(2)

Cont...13

A निर्देशांक ज्ञात करने के लिये समीकरणों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ को हल करना है ।

$$x^4 = 16a^2y^2 = 16a^2(4ax)$$

$$x^4 = 64a^3x$$

$$\text{या } x^4 - 64a^3 = 0$$

$$\text{या } x = 0 \text{ या } x = 4a \quad (1)$$

क्षेत्रफल OBACO = क्षेत्र OMACO - क्षेत्र OMABO

$$= \int_0^{4a} y, dx - \int_0^{4a} y_2 dx$$

$$= \int_0^{4a} 2\sqrt{ax} dx - \int_0^{4a} \frac{x^2}{4a} dx \quad (1)$$

$$= 2\sqrt{a} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^{4a} - \frac{1}{4a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{4a}$$

$$= \frac{32}{3} a^2 - \frac{16}{3} a^2 = \frac{16}{3} a^2 \text{ वर्ग ईकाई ।} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} .dx$$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} .dx$$

$$= \int \frac{(1 + \frac{1}{x^2})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 3} .dx \quad (1)$$

$$\text{माना } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow (1 + \frac{1}{x^2}) dx = dt \quad (1)$$

$$\therefore I = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{t}{\sqrt{3}} \right] \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left[\frac{(x - \frac{1}{x})}{\sqrt{3}} \right] \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} + c \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.17 सिद्ध कीजिये कि :-

$$\therefore I = \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} .dx = \pi a$$

$$\text{माना } x = a \cos\theta \Rightarrow dx = -a \sin\theta d\theta$$

$$\text{यदि } x = -a \text{ तब } \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$x = a \text{ तब } \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \quad (1)$$

$$\therefore I = \int_{\pi}^0 \sqrt{\frac{a+a \cos\theta}{a-a \cos\theta}} (-a \sin\theta) d\theta$$

$$= -a \int_{\pi}^0 \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \sin\theta d\theta$$

$$= -a \int_{\pi}^0 \sqrt{\frac{2\cos^2\theta/2}{2\sin^2\theta/2}} 2\sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2 d\theta \quad (1)$$

$$= -a \int_{\pi}^0 \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} \cdot \sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2 d\theta$$

$$= -a \int_{\pi}^0 \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1)$$

$$= -a \int_{\pi}^0 (1 + \cos\theta) d\theta$$

$$= -a \left(\int_{\pi}^0 d\theta + \int_{\pi}^0 \cos\theta d\theta \right)$$

$$= -a \int_0^{\pi} d\theta + a \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta$$

$$= a [\theta]_0^{\pi} + a [\sin\theta]_0^{\pi} \quad (1)$$

$$= a [\pi - 0] + a [\sin\pi - \sin 0] \quad (1)$$

$$= a\pi$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$$\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2} = 1 + \frac{2x+1}{x^2 + 3x + 2} = 1 + \frac{2x+3-2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= 1 + \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2}{x^2 + 3x + 2} \quad (1)$$

$$\therefore \int \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \int dx + \int \frac{2x+3}{x^2 + 3x + 2} dx - \int \frac{2}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$= x + \log(x^2+3x+2) - 2 \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad (2)$$

$$= x + \log(x^2+3x+2) - 2 \cdot \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \log \left(\frac{x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right) \quad (1)$$

$$= x + \log(x^2+3x+2) - 2 \log \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.18 का हल

$$(1-x^2) dy + xy dx = xy^2 dx$$

$$(1-x^2) dy = xy(y-1) dx$$

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{x}{1-x^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = - \frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow -\log y + \log(y-1) = -\frac{1}{2} \log(1-x^2) + \log c \quad (2)$$

$$\Rightarrow \log \frac{y-1}{y} + \log(1-x^2)^{1/2} = \log c$$

$$\Rightarrow \log \left[\left(\frac{y-1}{y} \right) \sqrt{1-x^2} \right] = \log c \quad (1)$$

$$\frac{y-1}{y} \sqrt{1-x^2} = c \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 5 \left(\frac{y}{x} \right) + 4 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \quad (1)$$

$$\text{माना } y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \quad (1)$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = 1 + 5v + 4v^2$$

$$x \frac{dv}{dx} = 4v^2 + 4v + 1$$

$$x \frac{dv}{dx} = (2v+1)^2$$

$$\frac{dv}{(2v+1)^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{2(2v+1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2(2v+1)} = \log x + \log c \quad (1)$$

अतः पुनः $v = \frac{y}{x}$ रखने पर

$$\frac{-1}{2\left(2\frac{y}{x}+1\right)} = \log x + \log c \quad (1)$$

$$\frac{-x}{2(2y+x)} = \log xc$$

$$xc = e^{\left[\frac{-x}{2(2y+x)}\right]} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.19 माना धोड़े A,B,C के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः P(A), P(B), P(C) है ।

माना P(C) = p

$$\begin{aligned} \text{प्रश्नानुसार } P(B) &= 2P(C) \\ &= 2p \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } P(A) &= 2P(B) = 2.(2p) \\ &= 4p \end{aligned} \quad (1)$$

$$\therefore P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow 4p + 2p + p = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{7}$$

$$P(A) = 4p = \frac{4}{7}, P(B) = 2p = \frac{2}{7}, P(C) = p = \frac{1}{7}$$

∴ B व C के जीतने की घटनाएँ अपवर्जी हैं । (1)

$$\begin{aligned} \therefore P(B \text{ या } C) &= P(B) + P(C) \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \end{aligned} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

अथवा OR

एक पाँसे की तीन फेंकों में 6 प्राप्त होने की संख्या के लिए चर राशि x है तो x के मान 0,1,2 और 3 हो सकते हैं । एक फेंक में सफलता की प्रायिकता p और असफलता की प्रायिकता q मानते हैं ।

$$\text{यहाँ } p = \frac{1}{6}, q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p(x=0) &= q \times q \times q \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x=1) &= p \times q \times q + q \times p \times q + q \times q \times p \quad (1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x=2) &= p \times p \times q + p \times q \times p + q \times p \times p \quad (1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x=3) &= p \times p \times p \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \quad (1) \end{aligned}$$

X	0	1	2	3
P(x)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$\square p(x) = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1 \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1 = 5 अंक)

प्र.20 का हल

∴ दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेद होने का प्रतिबंध

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ a^1 & b^1 & c^1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0+1 & 7-3 & -7+2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(4+3) - 4(-6-1) - 5(9-2) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 7 + 28 - 35 = 35 - 35 = 0$$

$$0 = 0$$

∴ अतः रेखाएँ प्रतिच्छेद हैं ।

Cont...18

अब प्रतिच्छेद बिन्दु के लिए दी हुई रेखा

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1} = r$$

पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(-3r-1, 2r+3, r-2)$ यदि रेखाएँ इस बिन्दु पर प्रतिच्छेदी है तो यह बिन्दु दूसरी दी हुई रेखा को भी संतुष्ट करेगा । (1)

$$\frac{-3r-1}{1} = \frac{2r+3-7}{-3} = \frac{r-2+7}{2}$$

हल करने पर $r = -1$

अतः रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं तथा प्रतिच्छेदी बिन्दु $(2,1,-3)$ है । (1)

उस समतल का समीकरण जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं -

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{या } (x+1)(4+3) + (y-3)(1+6) + (z+2)(9-2) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 7x + 7 + 7y - 21 + 7z + 14 = 0$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0 \quad (1)$$

(कुल $1+1+1+1+1+1 = 6$ अंक)

अथवा OR

बिन्दु (a,b,c) से गुजरने वाले किसी समतल का समीकरण

$$A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0 \quad \text{----- (i)} \quad (1)$$

यदि मूल बिन्दु $O(0,0,0)$ से इस समतल पर डाले गये लंब का पाद P हो तो OP का समीकरण होगा ।

$$\frac{x-0}{A} = \frac{y-0}{B} = \frac{z-0}{C} = r \quad (\text{माना}) \quad (1)$$

इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (Ar, Br, Cr) है । यदि बिन्दु P हो तो यह (i) को संतुष्ट करेगा ।

$$\therefore A(Ar-a) + B(Br-b) + C(Cr-c) = 0$$

$$\text{या } r(A^2+B^2+C^2) = aA + bB + cC \quad \text{----- (ii)} \quad (1)$$

P के बिन्दु पथ के लिए $x = Ar, y = Br, z = Cr$

$$\therefore A = \frac{x}{r}, B = \frac{y}{r}, C = \frac{z}{r} \quad (1)$$

ये मान समी. (2) में रखने पर बिन्दुपथ है -

$$r \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) = \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} + \frac{cz}{r} \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax + by + cz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0 \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

प्र.21 का हल

$$\vec{r} = 3i + 8j + 3k + \alpha (3i + j + k) \quad \text{----- (i)}$$

$$\vec{r} = 3i + 7j + 6k + \mu (-3i + 2j + 4k) \quad \text{----- (ii)}$$

समीकरण (1) $\vec{a}_1 = 3i + 8j + 3k, \vec{b}_1 = 3i + j + k \quad (1)$

समी. (2) से $\vec{a}_2 = 3i + 7j + 6k, \vec{b}_2 = -3i + 2j + 4k$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -3i - 7j + 6k - (3i + 8j + 3k)$$

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -6i - 15j + 3k \quad (1)$$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= i(-4-2) - j(12+3) + k(6-3)$$

$$= -6i - 15j + 3k$$

$$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{36+225+9} = \sqrt{270} \quad (1)$$

$$\text{न्यूनतम दूरी} = \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \quad (1)$$

$$= \frac{(-6i - 15j + 3k) \cdot (-6i - 15j + 3k)}{\sqrt{270}} \quad (1)$$

$$= \frac{36 + 225 + 9}{\sqrt{270}}$$

$$= \frac{270}{\sqrt{270}}$$

$$= \sqrt{270}$$

$$= 3\sqrt{30} \quad (1)$$

(कुल 1+1+1+1+1+1 = 6 अंक)

अथवा OR

माना गोले का समीकरण है

$$x^2 + y^2 + z^2 + 24x + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \text{----- (i)}$$

तो गोले का केन्द्र $(-4, -v, -w)$ (1)

चूंकि गोले का केन्द्र रेखा $5y + 2z = 0$ $2x - 3y$ पर स्थित है, इसलिए

$$5v + 2w = 0 \quad \text{----- (ii)}$$

एवं $24 - 30 = 0$ ----- (iii) (1)

चूंकि गोला बिन्दु $(0, -2, -4)$ तथा $(2, -1, -1)$ से होकर गुजरता है

इसलिए $0 + 4 + 16 + 0 - 4v - 8w + d = 0$

$$4v + 8w - d = 20 \quad \text{----- (iv)} \quad (1)$$

एवं $4 + 1 + 1 + 4u - 2v - 2w + d = 0$

$$4u - 2v - 2w + d = -6 \quad \text{----- (v)}$$

$$4u + v + 3w = 14 \quad \text{[समी. (4) + (5)]}$$

$$2u + v + 2w = 7 \quad \text{----- (vi)}$$

$$4v + 3w = 7 \quad \text{----- (vii) [समी. (6) - (3)]}$$

एवं $15v + 6w = 0$ ----- (viii) [समी. (2) × (3)]

$$8v + 6w = 14 \quad \text{----- (ix) [समी. (7) × (2) से]}$$

$$7v = -14 \quad \text{[समी. (8) - (9) से]} \quad (1)$$

$$v = -2$$

समीकरण (2) में v का मान रखने पर,

$$5(-2) + 2w = 0 \Rightarrow w = \frac{10}{2} = 5$$

समीकरण (3) में v का मान रखने पर,

$$2u - 3(-2) = 0 \Rightarrow u = \frac{-6}{2} = -3 \quad (1)$$

समीकरण (5) में u, v, w का मान रखने पर,

$$4(-3) - 2(-2) - 2(5) + d = -6$$

$$\Rightarrow d = 12$$

u, v, w एवं d के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(-3)x + 2(-2)y + 2(5)z + 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 10z + 12 = 0$$

∴ गोले का समीकरण

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 10z + 12 = 0 \quad (1)$$

(कुल $1+1+1+1+1+1 = 6$ अंक)